SCIENZA E SAPIENZA

di Ennio De Giorgi

Ennio De Giorgi, il grande matematico scomparso il 26 ottobre 1996, fu professore di Analisi Matematica presso la Scuola Normale di Pisa, coprì la carica di visiting professor *presso le Università di Berkeley, Stanford e Brown negli Stati Uniti. Dottore* honoris causa *presso le Università di Parigi e di Lucca, fu inoltre membro dell'Accademia delle Scienze. Negli ultimi vent'anni della sua vita profuse le sue energie intellettuali in una ricerca sui fondamenti della matematica e delle scienze in generale. Elaborò a questo scopo il progetto di un* forum *internazionale di scienziati, filosofi e teologi impegnati in un dialogo permanente alla ricerca di quella che in molte occasioni egli ebbe a chiamare la «vera sapienza». Riportiamo il testo di una conferenza da lui tenuta a Milano il 25 ottobre 1982 presso il Centro Culturale San Carlo e pubblicata su* Synesis*, rivista non più editata, come occasione di riflessione sulla genesi della scienza matematica, sui suoi nessi con il mondo reale, sulla sua applicabilità a problemi conoscitivi e tecnici.*

Tra i vari scienziati il matematico è quello che trova maggiori difficoltà a spiegare al pubblico il significato e le ragioni del suo lavoro; dato che il profano raramente ha notizia di scoperte in questo campo, difficilmente ha un'idea di cosa i matematici possono ricercare. Ancora più difficile è spiegare quale rapporto il matematico e la matematica possano avere con problemi di carattere culturale, religioso, sociale e politico, che normalmente colpiscono di più la sensibilità comune. In rapporto a tali questioni il matematico sembrerebbe avere una posizione di distacco, quasi da studioso di una scienza morta che ormai ha fatto il suo corso. Dobbiamo invece dire che la matematica, essendo oggi in una fase tutt'altro che statica, ha moltissimi problemi ancora aperti e non si trova affatto in una posizione di distacco dal resto della problematica cui ciascuno, in forme diverse a seconda dei tipi di cultura, è interessato.
Cominciamo col chiederci che cosa la matematica deve ancora cercare. Possiamo assumere a questo proposito due punti di vista: quello della matematica pura e quello della matematica applicata (o applicabile).

Matematica pura e matematica applicabile

Lo sviluppo delle diverse discipline scientifiche richiede calcoli sempre più complessi, applicazioni sempre più complesse della matematica come strumento. Un problema matematico di interesse evidente è allora quello di rispondere a queste esigenze, che vengono in primo luogo dalla fisica, dall'ingegneria e, oggi in grado crescente, anche dalla biologia, dall'economia e persino da certe discipline umanistiche (glottologia, linguistica, eccetera). In questo settore, malgrado i suoi continui progressi, la matematica è sempre in ritardo rispetto alle esigenze del mondo moderno. I problemi cui oggi l'umanità si trova di fronte, infatti, sono tali da richiedere il controllo simultaneo di un numero crescente di variabili, di dati che solo in parte è possibile controllare con precisione; è quindi piuttosto difficile fornire un'analisi soddisfacente di sistemi molto complessi e questa difficoltà obbliga il matematico ad aumentare continuamente la varietà e la potenza dei suoi metodi di calcolo.

Accanto alla richiesta di strumenti di calcolo e di elaborazione per risolvere problemi già impostati da altre scienze, alla matematica oggi è chiesto qualcosa di più: fornire modelli concettuali entro i quali inquadrare fenomeni che non si prestano a una descrizione intuitiva immediata. Questo problema si è già presentato in modo marcato nel campo della fisica. Tutti sanno che la fisica quantistica e la fisica relativistica possono essere descritte solo mediante modelli che appartengono alle matematiche superiori. Per esempio, si deve far riferimento agli spazi a più di tre dimensioni e talvolta intervengono in modo essenziale spazi a infinite dimensioni.

Anche in questo senso quindi la matematica è costretta a un continuo allargamento di prospettive. Man mano che si è andato sviluppando questo modo di procedere si è anche accresciuta l'importanza delle domande sulla matematizzabilità dell'universo.

Fino a che punto possiamo avere fiducia che i modelli matematici, fatti essenzialmente a tavolino, rispondono alla realtà? In che misura la realtà, anche quella che ci appare più complessa e caotica, ha un ordine che coincide con l'ordine della matematica?

Domande di questo tipo hanno occupato la filosofia fin dai tempi più antichi e tuttora continuano a essere argomento di riflessione quasi inesauribile per la ricerca filosofica e scientifica. Già ai tempi di Pitagora si aveva l'idea che l'Universo dovesse avere un ordine e che questo ordine dovesse avere un modello matematico.

L'idea che l'armonia dell'Universo potesse essere rappresentata dai numeri (gli stessi numeri che per esempio rappresentavano l'armonia musicale) si è periodicamente riaffacciata, in forme diverse, al pensiero antico e moderno. Tutti ricordano che per Galileo il mondo è un libro scritto in caratteri geometrici. Al tempo di Galileo la geometria rappresentava una gran parte della matematica e alla base del metodo galileiano c'era il postulato della struttura matematica del mondo. Ritroviamo lo stesso principio nel pensiero di Cartesio, di Newton, così come nella fisica moderna.

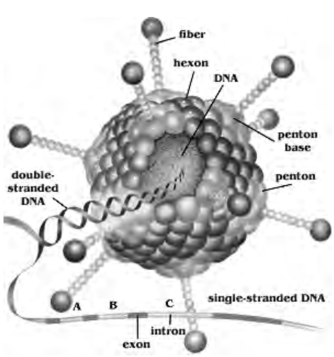
Anche per fenomeni apparentemente caotici (per esempio il moto delle particelle di un gas) la matematica fornisce schemi, come quelli del calcolo delle probabilità, che consentono di fare previsioni spesso assai precise. Il calcolo delle probabilità oggi è diventato uno dei pilastri della matematica ed è indispensabile per schematizzare una serie di fenomeni riguardanti, per esempio, la termodinamica o la teoria dell'informazione.

Possiamo certamente affermare che nel corso dei tempi la fiducia iniziale che filosofi e scienziati hanno avuto nella matematizzabilità dell'universo ha trovato una risposta largamente positiva.

Un motivo per cui il matematico continua a lavorare è dunque l'idea di aver trovato una via per capire l'ordine e l'armonia dell'Universo. Tuttavia egli non è guidato solo da esigenze provenienti dalle altre branche della scienza: all'interno della matematica sorge spesso il problema di ricercare un'armonia interna, una comprensione migliore degli stessi concetti elaborati per la soluzione di problemi posti da altre discipline.
Molte volte questa esigenza di armonia interna ha preceduto largamente le stesse richieste esterne. Un esempio molto semplice e significativo è dato dall'introduzione dell'unità immaginaria. Si tratta di uno strano numero, che viene scritto di solito con una *i*, ed è tale che il suo quadrato è —*1*. Quando fu introdotto non si conosceva nessun oggetto fisico, nessuna lunghezza o figura geometrica che, in qualche modo, potesse essere da esso rappresentato. L'unità immaginaria infatti fu elaborata esclusivamente per ragioni di coerenza interna dell'algebra. Facendo uso solamente dei numeri reali l'algebra presentava delle strane disarmonie; per esempio, alcune equazioni algebriche avevano qualche soluzione, mentre altre, del tutto analoghe, no. Ciò che spinse gli algebristi del Rinascimento a prendere in considerazione questo ente immaginario fu dunque il desiderio di vedere, all'interno del corpo algebrico, una certa perfezione, in modo che le leggi fondamentali dell'algebra non dovessero subire eccezioni e complicate casistiche.
In tempi più recenti ci si è accorti che l'unità immaginaria può avere interpretazioni fisiche estremamente significative, e addirittura oggi il suo uso è essenziale per lo sviluppo della fisica e dell'ingegneria.

Realismo e nominalismo

Si può dire in breve quali siano la natura e il senso della matematica e come siano collegati all'ordine e all'armonia dell'Universo?
In genere il matematico non parla volentieri di queste cose, perché teme di cadere in imprecisioni, confusioni, errori; però si interroga talvolta sul senso degli elementi matematici (numeri, punti, rette, eccetera). Su questo argomento le ipotesi possibili sono due: gli oggetti matematici hanno una loro realtà immateriale diversa da quella degli oggetti che cadono sotto i nostri sensi (è la tesi di Platone, che continua in forme diverse a circolare nella cultura matematica); oppure questi enti che il matematico studia sono soltanto espressioni linguistiche fittizie, che consentono di elaborare un linguaggio utile, ma non hanno una loro realtà (è quella che possiamo chiamare la tesi nominalistica).

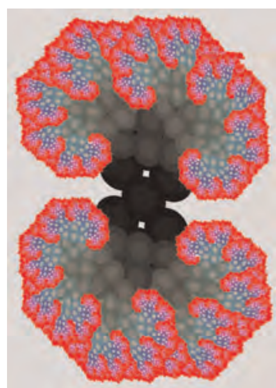


Le due tesi convivono in varie forme nel pensiero matematico contemporaneo; è abbastanza curioso che le due scuole di pensiero, con posizioni di principio opposte, giungano a risultati coincidenti sulla validità dei singoli teoremi particolari dei diversi rami della matematica: un dualismo singolare di cui forse sfugge il significato filosofico.
Personalmente sono più vicino alla concezione realista, perché è più consona al mio modo di lavorare: intuire possibili proprietà di alcuni enti matematici e, in un secondo tempo, verificare se di tali congetture è possibile dare una dimostrazione che deve obbedire alle regole del discorso matematico.

Altri invece enfatizzano l'aspetto formale, occupandosi più del discorso matematico che non degli enti matematici. Per costoro la matematica coincide essenzialmente con un certo modo di costruire e dedurre frasi secondo regole di formazione e di deduzione ben precise. (Nel processo deduttivo le frasi di partenza sono le ipotesi, quelle d'arrivo le tesi del teorema, i passaggi intermedi costituiscono la dimostrazione).
I contributi di questi due gruppi di matematici presentano una certa complementarietà. Da una parte i realisti hanno arricchito la matematica di intuizioni, congetture, dimostrazioni cui il nominalista si ispira nel costruire i suoi schemi formali: dall'altra l'insieme delle regole formali costituisce un oggetto della matematica altrettanto idealizzabile quanto, per esempio, l'insieme dei numeri e dei punti: il formalista fornisce così al realista altri oggetti su cui esercitare l'intuizione e la fantasia.

Infiniti sempre più grandi

Quale che sia l'orientamento, realista o nominalista, del matematico, è certa la validità di alcuni teoremi che possono apparire sconcertanti per un verso e confortanti per l'altro. Uno dei teoremi di Gödel dice che il primo degli oggetti matematici che incontriamo, l'insieme dei numeri interi non è mai perfettamente descrivibile con un numero finito di postulati formali. Di tale insieme possiamo indicare molte proprietà utili quali, per esempio, quelle che ci servono per le quattro operazioni, ma la descrizione dei numeri interi non è mai esauriente; a ogni teoria sfuggono infinite proprietà, una specie di riserva illimitata per nuove teorie sempre più ricche. Le teorie matematiche lasciano aperta la possibilità di un inserimento continuo di nuovi postulati che si aggiungono a quelli precedenti senza contraddirli: la matematica non ha bisogno di demolire le teorie precedenti per crearne delle nuove.
Uno dei settori in cui oggi si producono nuovi postulati fondamentali è quello dell'infinito matematico. La scala degli infiniti è andata crescendo da Cantor in poi. Man mano che si approfondiva lo studio sistematico degli insiemi infiniti ci si è resi conto che conveniva introdurre sempre nuovi postulati che garantissero l'esistenza di infiniti sempre più grandi. Il primo infinito è stato quello dei numeri interi, il secondo quello dei numeri reali, il terzo quello di tutte le funzioni reali di variabili reali. La scala degli infiniti si è così andata arricchendo fino ai cosiddetti numeri cardinali inaccessibili, che rappresentano il massimo di infinità finora raggiunto nell'ambito matematico.



Ma a che serve questa corsa a infiniti sempre più grandi?
In primo luogo risponde al continuo desiderio della mente umana di vedere cosa c'è oltre il confine cui è giunta; inoltre la considerazione di infiniti molto al di là delle esigenze di qualsiasi scienza applicata ha spesso aiutato a capire fenomeni che avvengono nel finito. Non è un caso che von Neumann, uno dei teorizzatori dei numeri cardinali, abbia anche costruito schemi fondamentali per la fisica teorica e ideato una teoria astratta dei giochi che oggi è alla base di molte applicazioni della matematica all'economia e alle teorie delle decisioni, fornendo un esempio di come i diversi aspetti della matematica

possano fondersi nell'esperienza di uno stesso studioso. Questi fatti offrono lo spunto a una serie di riflessioni che superano il campo della matematica: la prima è che non si può separare il desiderio di conoscenza pura dall'efficace intervento sulla realtà: che per un'azione veramente utile non basta conoscere l'oggetto su cui vogliamo agire, ma è necessaria una visione più ampia dell'ordine in cui è inserito.
Ma fino a che punto la matematica e le altre scienze possono darci questa visione?
La riflessione all'interno delle scienze dice che c'è un limite alla loro capacità di fornire una tale visione. Per esempio, la struttura delle affermazioni matematiche è di tipo ipotetico-deduttivo, permette descrizioni coerenti di mille mondi possibili. È necessario quindi il concorso dell'esperienza per capire come è fatto l'Universo in cui viviamo.
La matematica inoltre non garantisce dal suo interno la propria non - contraddittorietà: la convinzione che i principali postulati non sono contraddittori non può essere il risultato di una dimostrazione matematica. È stata infatti dimostrata la non dimostrabilità della coerenza di tali postulati.
La convinzione che i postulati fondamentali sono coerenti dovrà dunque inevitabilmente venire da qualcosa di esterno alla matematica stessa.
Essendo un matematico, ho parlato della matematica, ma discorsi analoghi potrebbero essere fatti da studiosi di altre discipline.
Ritengo infatti che tutti sarebbero concordi nel riconoscere il valore della scienza e, nello stesso tempo, ammettere che questo valore non è oggetto di alcuna disciplina scientifica.
Penso piuttosto che lo scienziato il quale, partendo dalla sua concreta esperienza di ricerca e di insegnamento, cerca di comprendere il significato e il valore della scienza, anche se non si considera filosofo di professione, è certamente filosofo nel senso etimologico della parola, cioè una persona che ama la sapienza.
Non cercherò di dare una definizione o una descrizione della sapienza, ma indicherò solo alcuni possibili segni dell'amore per la sapienza.
Certamente ama la sapienza lo scienziato che crede nei valori fondamentali della scienza, nella ricerca disinteressata della verità, nel desiderio di comunicarla a ogni persona interessata a conoscerla, nella speranza che le scoperte scientifiche servano al progresso dell'umanità e non siano usate per la sua distruzione.

In concreto, la fedeltà a questi ideali si manifesta, per esempio, nella difesa delle ricchezze naturali, piante, animali, ambienti, nel rispetto di ogni persona e nella difesa dei suoi diritti inalienabili, nella ricerca della pace e della solidarietà tra tutti i popoli del mondo.
Volendo segnalare due documenti che rispecchiano bene questi ideali, ricorderei la *Dichiarazione universale dei diritti umani* del 10 dicembre 1948 e il *Cantico delle creature* di San Francesco d'Assisi, che ci ricorda come la più alta manifestazione dell'amore per la sapienza è amare Dio con tutto il cuore, riconoscere in ogni persona la sua immagine, vedere nell'Universo un segno della sua gloria v