LA MISURA

OSSERVAZIONI, COMMENTI, PROPOSTE

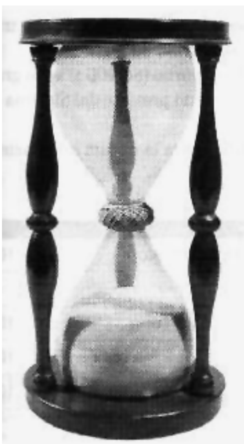
*di Anna Paola Longo**

L'interesse che spinge l'autore a scrivere a proposito della misura è essenzialmente didattico. Per questo mette in evidenza alcune relazioni, spesso ignorate o sottovalutate, tra diversi punti di vista, e segnala alcuni passaggi didattici particolarmente significativi. Un matematico, un fisico, un ingegnere si occupano in modo diverso di misura. E ancora diverso è, probabilmente, il modo con cui in un qualsiasi discorso non scientifico si può fare riferimento alla misura. Ma, per un insegnamento efficace e formativo, bisogna che questi punti di vista si ricompongano e le divergenze vengano considerate fonte di ricchezza e non di confusione. Occorre dunque un punto di vista interdisciplinare.

Penso di poter iniziare questa riflessione proponendo le problematiche più rilevanti che si incontrano sia in senso strettamente culturale, sia, e soprattutto, in riferimento alla questione didattica.
Quando ho iniziato a insegnare analisi matematica alle matricole del Politecnico di Torino, non sospettavo che ci fosse un così stretto legame tra i concetti dell'analisi e la conoscenza della misura, dato che non si parla quasi mai esplicitamente di misura nel programma del corso. Ma ero molto giovane e ho dovuto rivedere presto questa mia supposizione.
Per esempio, mi è capitato più di una volta che gli studenti venissero a dirmi che doveva esserci qualche errore in ciò che stavano facendo, perché si trovavano a dover calcolare sin2 o valori simili, in cui a loro avviso c'era un assurdo, «perché 2 non è un angolo, ci dovrebbe essere un multiplo di π».
In un questionario proposto alle matricole del corso di informatica, all'inizio delle lezioni di geometria, chiedevo: «nella formula $\sin \pi/4 = \sqrt{2}/2$, $\pi/4$ è un angolo nel piano? è un angolo nello spazio? è un numero reale?».
Le risposte confermarono l'ipotesi che molti studenti non riconoscono che $\pi/4$ è un numero reale, misura di un angolo. Ma se $\pi/4$ fosse un angolo e non un numero, cosa rappresenterebbe il grafico della funzione $y = \sin x$? Non certo una funzione reale di variabile reale.

È anche sorprendente come sia frequente negli studenti che accedono ai primi corsi universitari la confusione tra il concetto di integrale definito e quello di area. L'integrale definito fornisce un'area solo se la funzione integranda è positiva e se gli estremi sono in ordine crescente, ma alcuni studenti continuano ad affermare che l'integrale definito si può «definire» come un'area.
Mi sono imbattuta in altre esperienze didattiche interessanti sulla misura occupandomi della didattica della matematica nella scuola elementare e media, che mi hanno fatto riflettere ulteriormente sullo stretto legame del concetto di misura con altri concetti matematici.

L'integrità dell'oggetto da misurare



In un'esperienza, era stato chiesto a ciascun bambino di una terza elementare (Scuola *Duca degli Abruzzi*, Torino) di tagliare una striscia di lunghezza 3/4 di metro da un fiocco lungo 2 metri. Ho notato che nessuno dei bambini si è preoccupato fin dall'inizio di ottenere alla fine una striscia intera. Tutti hanno dimezzato la striscia originaria, ottenendo due parti da un metro. Hanno poi continuato a tagliare in parti uguali, fino a ottenere tanti pezzi lunghi ciascuno 1 quarto di metro. A questo punto avevano ben chiaro di doverne prendere 3 per rispondere allo scopo prefissato, ma sono rimasti sconcertati accorgendosi di non poter più avere un pezzo intero. Il guaio è stato rimediato attaccando i 3 pezzi con una pinzatrice.
I bambini hanno usato l'oggetto da misurare per costruire il campione, alterando in modo irreversibile l'oggetto da misurare, mentre sarebbe stato più opportuno procurarsi il campione in altro modo. L'integrità dell'oggetto da misurare è una condizione che deve essere rispetta in modo assoluto e che impone la ricerca di un procedimento adeguato, anche se più complesso.

Le azioni della misura

Mi sono accorta, per la prima volta in questa occasione, che le azioni della misura non sono affatto banali, come ho poi potuto constatare anche in allievi di scuola media.
Compiere con una certa precisione una misura comporta attenzione al rispetto di alcune condizioni (non versare acqua mentre si travasa, non sovrapporre parti di figure geometriche, eccetera), che esigono una manualità abbastanza fine.
D'altra parte, non avrebbe alcun senso parlare della misura solo in termini matematici, trascurando le esperienze che danno senso a tutto ciò che in matematica si può dire. È certo che un inse-

gnante di liceo può affermare di non avere tempo per interessarsi di questo, ma non sarebbe comunque saggio censurare il problema. Su questa rivista è stato più volte auspicato che apprendere sia una reinvenzione guidata, secondo quanto Freudenthal ha proposto ed anche mostrato possibile in alcune esperienze didattiche[1]. Questa è un'ipotesi a mio avviso inevitabile, se si vuole che gli allievi siano motivati e giungano a porsi domande sul significato e sui collegamenti. Per quel che riguarda la matematica, è in pieno accordo con la teoria del «teorema in atto» di G. Vergnaud, secondo cui un concetto matematico può essere incontrato in situazioni di vario tipo, che lo contengono come principio organizzatore[2]. In questa prima fase si forma una conoscenza implicita, che viene poi resa esplicita attraverso un opportuno lavoro didattico.
Per quel che riguarda la misura, le attività varie e l'analisi dettagliata di vari domini di esperienze, costituiscono per la matematica esempi di teoremi in atto. Si ricordi che Vergnaud indica con il termine «teorema» qualsiasi concetto matematico, anche una definizione o una proprietà.
Dunque, dal punto di vista scolastico, il lavoro sulla misura può essere concepito solo a lunga scadenza. Per questo, se ci fosse necessità di recupero, qualsiasi sia il livello scolastico, occorre che l'insegnante riprenda il lavoro dalle origini, verificando quali sono i passi concettuali che sono stati eseguiti o saltati.

Una parola, molti significati

Quando si inizia a interessarsi alla didattica di un argomento scientifico, è importante ricordare che i termini che si usano in senso tecnico sono parole di per sé significative anche nella lingua comune. Anzi, il significato comune precede sempre quello tecnico nell'esperienza di ciascun individuo, e quindi anche dei nostri allievi. Può capitare che noi insegnanti siamo così abituati al significato specifico che un termine ha nella nostra disciplina, da non accorgerci di aver dimenticato gli altri significati del linguaggio comune, e quindi non sospettiamo tutti gli equivoci possibili per gli studenti.
Questa situazione comporta la necessità di indagare in classe, con gli allievi, sui molti significati che uno stesso termine può assumere a seconda del contesto in cui viene usato, per porne in evidenza differenze ed analogie. Ciò permette di riconoscere con chiarezza le particolari connotazioni che il campo tecnico assegna alla parola in questione.
Anche la parola «misura» nella lingua italiana ha molti significati, non tutti perfettamente coincidenti con quello tecnico.

[1] Cfr.: H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matemazica*, La Scuola, Brescia 1994.
[2] Cfr.: G. Vergnaud, *Schemi teorici e fatti empirici nella psicologia dell'educazione matematica*, in: C. Bernardi (a cura di), *Sviluppi e tendenze internazionali in didattica della matematica*, Pitagora, Bologna 1995. Cfr. anche: G. Vergnaud, *Il bambino, la matematica, la realtà*, Armando, Roma 1994.

Il suo campo semantico è abbastanza vasto, ed è interessante rilevarlo esaminando semplici frasi come quelle riportate nel box a lato.
Possiamo osservare che il significato tecnico non è completamente differente dai vari significati che abbiamo sopra osservato, ma certamente non appare come predominante nella lingua italiana. Non è un fatto eccezionale. Tutte le parole che il linguaggio scientifico assume dalla lingua madre, assumono nell'uso tecnico una connotazione specifica particolare, anche se spesso non perdono completamente il legame con i significati originari. E di questa diversità bisogna rendere consapevoli gli allievi, affinché le sovrapposizioni inconsapevoli non generino misconoscenze.

Le scarpe su misura sono particolarmente comode.
La misura è colma!
L'insegnante usa due pesi e due misure
Torino è una città a misura d'uomo?
I giovani non hanno il senso della misura!
Il parlamento ha approvato le nuove misure fiscali
La sarta mi ha misurato il vestito per la cerimonia
Misura le parole!
La casa misura 20 metri in altezza
I suoi gesti sono misurati.

Il significato tecnico

L'idea centrale della misura in campo scientifico è che in una determinata classe di oggetti si associa a ciascuno di essi un numero attraverso un procedimento di confronto con un particolare elemento della classe, che viene detto «campione» o unità di misura. A uno stesso oggetto, in realtà, possono corrispondere più «grandezze fisiche», cioè più caratteristiche osservabili, e ciascuna di esse può essere misurabile. Per esempio, si può misurare sia il peso che il volume di un solido.
Il procedimento di confronto varia, nella sua realizzazione, per ciascun tipo di caratteristica misurabile, ma non varia se si confrontano tra loro due oggetti dello stesso tipo (grandezze omogenee). La possibilità di misurare poggia sul fatto che le grandezze di una classe siano ordinabili, e cioè che tra due qualsiasi oggetti A e B della classe in questione esista una strategia (semplice o complessa, questo non interessa) che porti a concludere se A è uguale a B, se A è maggiore o minore di B. Vedremo poi dettagliatamente come si costruisce la misura e come la matematica rappresenti in modo formale questo processo.
In tutti i diversi significati della parola «misura» nelle frasi sopra elencate, è certamente contenuta l'idea comune di confronto, di rapporto, di proporzione. Ma non sempre si giunge a un numero; si tratta piuttosto del confronto con un criterio ideale, con un paradigma di equilibrio, con le condizioni di una possibile armonia. Si tratta dunque di un confronto intuitivo, generalmente immediato, perché l'abitudine e la ripetizione ci rendono idonei a trarre conclusioni assai rapide, solo apparentemente spontanee.
Nell'uso scientifico, invece, il confronto deve poter essere eseguito con azioni specifiche, che restano dello stesso tipo quando si considerano oggetti di una stessa classe di grandezze. Confrontare lunghezze, pesi, rotazioni, forze, eccetera mette in

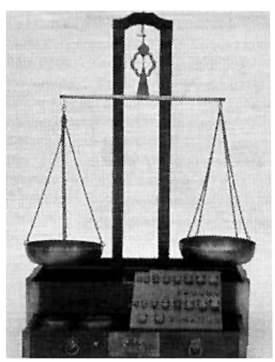
atto, in ciascuna di queste classi, sempre lo stesso tipo di modalità, qualsiasi sia la coppia di elementi che si considerano. Tale modalità si può quindi descrivere con precisione e codificare.
Il confronto inoltre deve produrre un numero, che si chiama misura della grandezza A, generato dal confronto delle grandezze di una stessa classe con la grandezza scelta come campione.

Numeri di diverso tipo

Gli insiemi numerici utilizzati per misurare sono di diverso tipo.
Esistono misure espresse con i numeri naturali, come quando contiamo gli elementi di un insieme discreto (le caramelle contenute in un piatto, gli alunni di una classe, le sigarette in un pacchetto, le macchine vendute da una fabbrica in un certo anno).
Esistono misure espresse con i numeri interi relativi, come quando contiamo i passi percorsi camminando avanti e indietro in una direzione fissata, le persone che salgono e scendono da un autobus o la temperatura atmosferica.
Esistono misure espresse con i numeri razionali, come quando si confrontano due grandezze rispetto a un'unità di misura che è un sottomultliplo comune dell'una e dell'altra. Se contassimo i soldi fissando come unità un biglietto da 100 000, per contare i biglietti da 10 000 o da 1 000 avremmo bisogno dei numeri decimali.
Esistono misure espresse con i numeri reali positivi (riguardano insiemi continui come pesi e lunghezze) oppure con numeri reali sia positivi che negativi (crediti e debiti, distanze orientate).
Esistono infine misure espresse utilizzando «classi di resti», ossia tutte le misure di fenomeni che si ripetono con periodicità: le rotazioni e gli angoli, le ore del giorno, i giorni della settimana.

L'attività pratica di misurare

Quanto ai modi di costruire il numero che chiamiamo «misura», esistono altre diversificazioni.
In alcuni casi si può eseguire il confronto operando direttamente sui due oggetti in questione: se si vuole confrontare la lunghezza di due corde che sono sullo stesso tavolo, basterà distenderle una accanto all'altra, facendo in modo che un estremo della prima e uno della seconda coincidano.
Altre volte il confronto diretto non è possibile. Ecco l'esempio di Gerard Vergnaud a questo proposito. Se vogliamo confrontare l'altezza della finestra e la larghezza della lavagna di un'aula, se la lavagna è fissata al muro non è possibile un confronto diretto. Si può procedere in due modi. Il primo è ricorrere a un oggetto



ausiliario: un bastone o un pezzo di spago la cui lunghezza si avvicini abbastanza alle due da confrontare utilizzandolo come intermediario. Il secondo consiste nel misurare ciascuno dei due oggetti con uno stesso strumento di misura e confrontare tra loro le due misure ottenute.
La misura è ancora diretta quando si dispone di uno strumento che permette di associare a un oggetto il numero che sarà la sua misura come, per esempio, una bilancia a bracci uguali provvista di pesi campione.
Nel caso di un rettangolo, è possibile misurarne in modo diretto la superficie riportando tante volte su di esso una figura unitaria oppure, in modo più semplice, sovrapponendo a esso una griglia quadrettata predisposta, con una maglia sufficientemente piccola.
Tuttavaia, abitualmente non si procede in questo modo. Esiste una procedura, che evita quella diretta, sostituendo a essa il prodotto delle due misure dei lati del rettangolo.
Alcune volte un procedimento indiretto di misura richiede di operare con molta inventiva, utilizzando proprietà non banali. Talete misurò l'altezza di una piramide per mezzo della sua ombra, con un ragionamento molto semplice che utilizza la similitudine dei triangoli. In questo modo l'intelligenza ha reso possibile la misura di una distanza che è fuori della portata degli strumenti che l'uomo ha in quel momento a sua disposizione. Questo è un fatto mirabile. L'intelligenza crea uno strumento che in qualche modo prolunga la capacità esplorativa dell'uomo. Plutarco esprime questo stupito riconoscimento. Egli mette queste parole in bocca a Nilax che si rivolge a Talete: «Mentre egli ti onora, particolarmente ti ammira per diverse grandi realizzazioni e particolarmente per il modo in cui, con piccolo sforzo e senza l'aiuto di strumenti matematici, tu trovasti così accuratamente l'altezza delle piramidi. Perché, avendo fissato il tuo bastone al vertice dell'ombra gettata dalla piramide, due triangoli erano formati dai raggi tangenti del sole, e da questi tu mostravi che il rapporto di un'ombra all'altra era uguale al rapporto dell'altezza della piramide al bastone».

Il campione

Il procedimento della misura richiede che si fissi in una classe di grandezze un oggetto particolare, che prende il nome di unità di misura o campione, con cui confrontare tutti gli altri oggetti.
Una volta fatta questa scelta, il procedimento può iniziare. Da un punto di vista teorico si può, anzi si deve, affermare che il campione è arbitrario, perché la diversità della scelta non modifica la procedura che si deve mettere in atto per misurare.
Invece, dal punto di vista pratico, i criteri per la scelta sono sem-

pre molto ragionevoli, poiché riguardano la struttura del problema in cui l'operazione di misura si colloca.
Misurare la distanza tra la Terra e la Luna è molto diverso che misurare la distanza di due oggetti posti su un tavolo; pesare un grande autocarro pieno del suo carico è molto diverso che pesare un piccolo oggetto prezioso in una gioielleria.
È evidente che i termini «grande» e «piccolo» non hanno un valore assoluto. Essi acquistano senso solo rispetto all'ordine di grandezza degli oggetti che si stanno considerando. Per esempio, la distanza di un chilometro è grande se si pensa a due oggetti su un tavolo, mentre sarebbe piccola rispetto alla distanza tra la Terra e la Luna.
Dal punto di vista didattico, penso che sia ormai consolidata l'abitudine, nella scuola elementare e media, di partire con campioni arbitrari per passare poi a campioni convenzionali. Tuttavia, è importante esplicitare come le convenzioni siano necessarie per poter comunicare e avere relazioni sociali. Questo passaggio è analogo a quello che conduce alla simbolizzazione in aritmetica: i simboli delle operazioni nascono con la funzione di rappresentare azioni (aggiungo, tolgo, misuro una parte, eccetera).
Il passaggio dalla scelta arbitraria a quella convenzionale è un aspetto caratteristico della scienza, che va ben compreso dagli studenti.
In sintesi, ciò che si vuole suscitare negli allievi non è solo la capacità di interpretare i simboli e i concetti convenzionali della scienza, ma che essi imparino a compiere le azioni di simbolizzare e di misurare, in accordo con H. Freudenthal[3].

Misurare per prevedere

Parlando di misura, veniamo a trovarci di fronte a un'attività molto articolata che l'uomo compie non solo per motivi pratici, ma anche nel tentativo di comprendere i fenomeni naturali. Un aspetto emblematico di questa finalizzazione emerge quando si usano le misure per formulare leggi fisiche.
C. Bernardini ha dedicato un intero libro a questo argomento[4].
Dopo aver illustrato il senso di una legge molto nota, la proporzionalità del peso al volume, dove la costante di proporzionalità si chiama «peso specifico», commenta: «Usando, più o meno consciamente, questa formula, si può decidere se un oggetto è veramente d'oro come sembra: il suo peso specifico dovrà essere di 19,3 grammi per centimetro cubico. Se fosse di metallo dorato, per esempio argento, sarebbe di 10,5 grammi per centimetro cubico». E poco dopo aggiunge: «Ecco che ho buttato lì una frase di aspetto innocuo, che invece è gravida di abitudini o, addirittura,

[3] Cfr.: H. Freudenthal, *op. cit.*
[4] Cfr.: C. Bernardini, *Che cos'è una legge fisica*, Editori Riuniti, Roma 1983.

di tradizioni: una costante è più utile di una funzione! Di che diavolo di utilità si tratta? Vi propongo di confrontare allora, da questo punto di vista, due formule molto diverse. La prima la scrivo come una grande verità, perché certamente lo è: "tutto è funzione di tutto", cioè tutte le grandezze fisiche dipendono, in linea di principio, dal valore di tutte le altre. Questa formula non è mai sbagliata, perché se facessimo misure infinitamente precise, certamente scopriremmo che il peso specifico dell'oro dipende dalla posizione della Luna all'istante della misura, tanto per fare un esempio di dipendenza bizzarra. Però, questa grande verità è assolutamente inutile. Se dovessimo tenerne conto, come ci viene suggerito da qualche filosofo esperto di verità assolute, addio scienze naturali! Perché le scienze naturali si preoccupano proprio di contrastare questa inutile verità con l'altra, più utile: "tutto dipende così poco da quasi tutto il resto, che la legge più comune esprime la costanza di qualcosa, di opportunamente scelto, anche rispetto alle sole variabili significative". Insomma, accantonando il miraggio di misure infinitamente precise, il peso specifico non dipende nemmeno dalla variabile V, volume, che pure è significativa per il nostro problema. E della Luna o di altre variabili non si parla neppure».
Se volessimo semplificare al massimo, potremmo dire che una legge fisica esprime una relazione tra grandezze fisiche che viene tradotta in relazione tra numeri attraverso le misure delle grandezze. Tale relazione è talvolta semplice, talvolta così complessa da non essere traducibile in nessuna semplice relazione analitica. Tentiamo una schematizzazione semplice di questi concetti:

RELAZIONE TRA GRANDEZZE

RELAZIONE TRA NUMERI (MISURE)

LEGGE

DESCRIVERE	PREVEDERE	INTERPRETARE
oggetti fenomeni	proprietà degli oggetti andamento dei fenomeni	spiegare modellizzare formulare teorie

**Docente di Analisi matematica*
Politecnico di Torino