

FARE ESPERIENZA DI GEOMETRIA

di Anna Marazzini*

Il condizionamento della società dell'immagine rende difficile ai ragazzi il lavoro di riflessione e di analisi proprio del «fare matematica». Invece è possibile accompagnare gli allievi in un cammino che consenta loro di «fare esperienza» di una progressiva formalizzazione. Lo testimonia questo articolo che propone un percorso didattico che riguarda l'insegnamento della geometria in prima media.

Tenere un corso di matematica ad alunni in una fascia d'età tra gli undici e i tredici anni, significa insegnare a ragazze e ragazzini infarciti di videogiochi e televisione ma piuttosto allergici ai libri, divoratori di immagini virtuali ma incapaci di guardare la realtà e di immaginare, abituati a bruciare in un attimo le proprie esperienze e spesso insofferenti alla riflessione e alla fatica, impazienti nel lavoro e poco avvezzi a progettare, a verificare e a correggere, spontanei e immediati nella comunicazione ma poveri di parole ... e l'elenco potrebbe continuare.

L'attività matematica, per contro, richiede atteggiamenti di attenzione, ascolto, ricerca; richiede capacità di osservare, analizzare, indagare e operare in modo ordinato e finalizzato; richiede l'uso di un linguaggio rigoroso ed essenziale. Il «fare matematica», così come ogni esperienza conoscitiva, richiede la disponibilità a percorrere una strada i cui passi sono dettati dall'oggetto del conoscere e la pazienza di «cercare dentro la realtà», lasciandosi sfidare dalle domande che essa suscita: tutto ciò non sembra essere né attitudine né abitudine dei nostri ragazzi.

A questo va aggiunto che le capacità intellettive costitutive della struttura della persona non sono adeguatamente sviluppate nei ragazzi di questa età: proprio tra gli undici e i quattordici anni, nell'evoluzione del pensiero logico si ha il passaggio dalla fase del pensiero operatorio, o logico-concreto, alla fase del pensiero formale, o ipotetico-deduttivo. Si può dire che il bambino, nel periodo delle operazioni concrete, elabora una serie di «piccole» strutture di operazioni che gli permettono di agire sul reale con classificazioni, ordinamenti, numerazioni, eccetera; ma queste strutture non sono coordinate fra loro e inoltre l'azione mentale del bambino necessita, in questa fase, della presenza, effettiva o immaginata, di oggetti o situazioni concrete.

L'attività didattica è stata svolta nelle classi prime della Scuola Media Papa Luciani di Cusano Milanino.

L'aspetto nuovo del pensiero a partire dagli undici-dodici anni è invece l'elaborazione di strutture d'insieme entro le quali vengono collegati e compresi i meccanismi operativi già assimilati, e che, via via, si stacca dalla presenza, anche solo immaginata, di oggetti o situazioni concrete e ragiona sulla base di enunciati precedentemente interiorizzati e formalizzati e di nuove ipotesi.

Di fronte a questa situazione di «disarmonia» dei preadolescenti, viene da pensare che «fare matematica» con loro sia un'impresa, non dico priva di attrattiva, ma sicuramente ardua e faticosa e destinata per lo più a ottenere risultati poco soddisfacenti.

C'è infatti chi fatica a vedere il valore formativo della matematica per questi ragazzi e reputa sterile darsi da fare per risvegliare curiosità e interesse nei confronti di una materia ritenuta «arida» quando altre attività catturano più facilmente l'attenzione degli alunni e sono ugualmente, se non più, formative di una mentalità scientifica. Tanto vale, durante le ore di aritmetica e di geometria, limitarsi a «mettere in testa» a questi ragazzini i contenuti più importanti (ma quali? e stabiliti in base a quali criteri?) riducendo il compito dell'insegnante a quello di «ripetitore» di contenuti funzionali al raggiungimento di determinate competenze e di «correttore» del lavoro dello studente allo scopo di fargli raggiungere un buon addestramento fine a se stesso.

Viceversa, è possibile proprio partire dalla conoscenza, e direi anche dall'accoglienza, della situazione dei ragazzi e lasciarsi provocare dal bisogno tipico (anche se spesso implicito e inaridito) del preadolescente di allargare i confini della propria esperienza e di comprendere sempre più a fondo se stesso e tutto ciò che lo circonda. In questi termini, da un lato l'insegnamento della matematica entra nell'orizzonte della formazione globale della persona e della formazione del pensiero razionale e dall'altro diventa possibile pensare alle attività che giorno per giorno vengono svolte in classe come passi verso la maturazione della capacità di entrare in rapporto con la realtà.

In tale modo viene valorizzata la matematica in tutta la sua forza conoscitiva, in alternativa a una visione riduttiva nella quale prevale la funzione sociale e strumentale; inoltre viene rivalutato il compito dell'insegnante di matematica che è sì quello di favorire lo sviluppo delle capacità dell'alunno, ma non a prescindere dalla preoccupazione che accada un incremento del suo rapporto con la realtà (anche in questo caso in alternativa a una concezione che riduce l'insegnante a «facilitatore» degli apprendimenti e «allenatore» delle capacità).

Naturalmente non è automatico che quanto detto si realizzi nel lavoro quotidiano, ma è a partire da queste considerazioni generali che si possono far emergere mete e criteri didattici che



tengano conto sia della situazione dei ragazzi sia delle caratteristiche della matematica e quindi coerenti con l'esigenza che «semplificare» non coincida con «snaturare» e che «selezionare» non coincida con «censurare».

Categorie di metodo

Dopo aver descritto alcuni elementi del contesto nel quale si inserisce la costruzione di un percorso di insegnamento della matematica nella scuola media, vorrei mettere in evidenza alcune categorie di metodo sulle quali è possibile appoggiare lo svolgimento di questo percorso, facendo riferimento alla mia esperienza di insegnamento della geometria in prima media.

Si verifica a volte che ragazzi capaci e ben preparati, pur conoscendo e applicando correttamente le formule per il calcolo delle aree e dei perimetri di triangoli e quadrilateri, si disorientano e sbagliano nella risoluzione di «problemi insoliti», come per esempio: «determina area e perimetro di un poligono concavo (del quale si fornisce il disegno già fatto) composto da rettangoli e quadrati (dei quali si danno le misure di tutti i lati)».

Una spiegazione di ciò sta nel fatto che il bambino undicenne dal punto di vista affettivo non è ancora autonomo e, di riflesso, nel lavoro scolastico cerca e si lega a schemi fissi sui quali appoggiare il proprio fare (è tipica la domanda: «allora tutte le volte che è così faccio come ho fatto adesso?»).

Il bambino quindi di fronte a un tipo di poligono sul quale non ha quasi mai lavorato si sente senza punti di riferimento e spesso reagisce dicendo di «non conoscere la formula». Solo se tranquillizzato sul fatto che quello che sa gli basta e orientato, almeno inizialmente, nell'osservazione della figura, riesce a capire e risolvere il problema.

Un altro motivo di difficoltà è legato invece a una confusa, se non errata, comprensione di alcuni concetti di base come quello di figura piana (che differenza c'è fra perimetro e area per un bambino che quando pensa alla figura la immagina vuota?) oppure quello di angolo (cosa significa ampiezza e misura dell'ampiezza di un angolo per un bambino che quando pensa all'angolo riduce la sua immagine al vertice?).

Come affrontare una tale situazione? Che cosa fare?

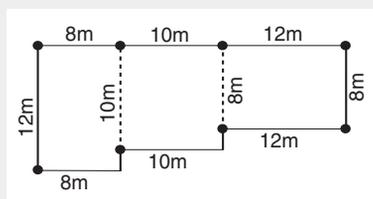
Un «problema insolito»

La figura rappresenta la pianta di un cortile.

La parte quadrata viene utilizzata come giardino; le parti rettangolari vengono utilizzate una come zona per il gioco e l'altra per il posteggio delle auto.

Calcolare:

- le misure dell'area e del perimetro della zona adibita a giardino;
- le misure dell'area e del perimetro delle singole zone rettangolari;
- le misure dell'area e del perimetro di tutto il cortile.



Punti di riferimento certi

Un primo criterio di metodo è quello di non lasciarsi prendere dalla tentazione di ricominciare da capo, di cancellare o svalutare quanto il bambino ha imparato durante gli anni precedenti; questo è importante in particolare quando nel corso degli studi è previsto un cambiamento di insegnante. Nel momento in cui si impostano e si propongono nuovi lavori, è importante essere consapevoli di quanto gli alunni sanno e sanno fare per essere in grado di offrire loro punti di riferimento certi, supporti sui quali possano appoggiarsi almeno nelle prime fasi di una nuova attività. È vero infatti che occorre portare l'alunno a una maturazione delle proprie capacità intellettive e questo avviene solo ponendo nuove domande, aprendo nuove questioni, ma queste domande devono essere alla portata del bambino pena il rischio di disorientare e demotivare al lavoro e all'azione personale sulle cose.

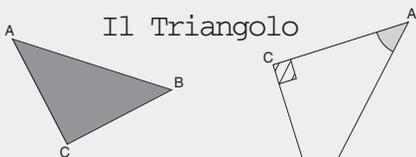
Dal concreto all'astratto

Un altro criterio di metodo deriva immediatamente dalle considerazioni generali svolte in precedenza: se è vero che la formazione di una capacità «astrattiva» è obiettivo da raggiungere, allora è necessario procedere sempre dal concreto all'astratto e quindi privilegiare nel lavoro scolastico l'aspetto dell'operatività o delle azioni concrete. Operatività che non coincide necessariamente con la manipolazione di oggetti concreti, anche se da un punto di vista didattico a volte è utile ricorrervi; fanno parte dell'operatività tutte quelle attività di osservazione concreta ovvero di confronto, di sovrapposizione, di misurazione e di costruzione, di disegni o modelli materiali, che hanno come scopo quello di rispondere a una domanda come, per esempio: «che cos'è una figura piana?».

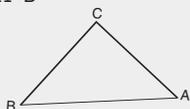
Ho già detto come a volte non sono chiari i concetti di area e di perimetro perché non è chiara la differenza tra la figura e il suo contorno.

Quando lavoriamo sulle figure, disegniamo e facciamo disegnare una linea chiusa (più spesso una spezzata chiusa) e il bambino non sempre legge e interpreta quel disegno al di là delle apparenze, anzi ciò che gli si è fissato come immagine della figura è proprio quel disegno. Non serve allora limitarsi a ripetere e far ripetere la definizione di figura, ma occorre pensare, scegliere, progettare delle azioni concrete da proporre agli alunni, occorre fornire modelli il più possibile calzanti con la realtà: se interessa il bordo è sufficiente disegnare una linea, se interessa la figura si può far colorare l'interno o far tagliare il foglio.

Il Triangolo



Gli angoli in A e in B sono acuti.



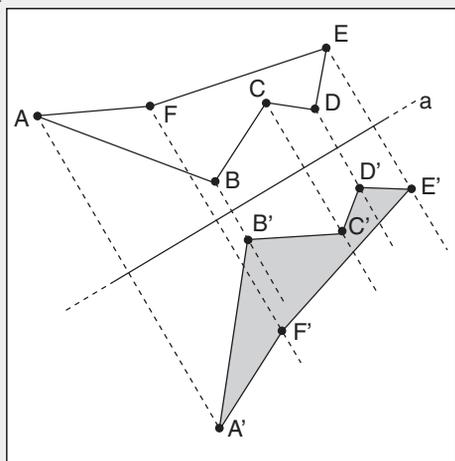
Dal quaderno di Massimiliano (classe 1B)

Queste azioni e questi modelli costituiscono il terreno per la concettualizzazione e sono propedeutici a passi successivi. È importante inoltre esplicitare con chiarezza l'obiettivo e le tappe di lavoro e indicare gli strumenti che possono essere utilizzati e le loro modalità d'uso.

Riflettere sulle esperienze

La formazione dei concetti inizia dalle azioni concrete, ma non ne è il risultato automatico. Da ciò deriva il terzo criterio di metodo: occorre far prendere coscienza e far riflettere sulle esperienze. Spesso i ragazzi durante le attività operative dimenticano lo scopo del lavoro, dimenticano di osservare, «fanno» e basta: alcuni vengono presi dalla smania di terminare, altri si fissano nella ripetizione di ciò che sanno fare bene ed evitano quello che crea difficoltà. Inoltre, poco capaci di cogliere analogie, si legano al particolare senza riuscire ad attribuirgli significato di modello. Bisogna allora che l'insegnante dia indicazioni affinché gli alunni controllino, correggano e completino il proprio lavoro; questo non significa sostituirsi ai ragazzi ma fornire quei segnali, ritenuti via via opportuni, che permettono loro di operare in modo ragionato. Occorre inoltre raccogliere le intuizioni, confrontare le diverse strategie e le diverse rappresentazioni eventualmente usate per arrivare allo stesso scopo, organizzare le osservazioni e i dati raccolti selezionandoli o classificandoli, decidere quali sono gli elementi utili in quel momento. È inoltre importante che i ragazzi «esprimano a parole» ciò che hanno fatto, le osservazioni e le conclusioni alle quali sono arrivati.

Esercizio sulla simmetria: asse esterno al poligono, non parallelo a uno dei lati della figura



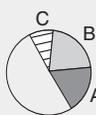
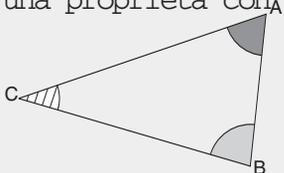
Usando la matita e il righello, ho disegnato, in un punto qualsiasi del foglio, un poligono con 6 lati, segnando ogni suo vertice con una lettera diversa. Poi ho tracciato una retta non parallela ai lati della figura e all'esterno di essa che ho chiamato «a»; successivamente ho poggiato il lato del righello sul punto A e tenendolo là fermo, l'ho mosso perpendicolarmente alla retta e ho poi tracciato una linea tratteggiata. Prendendo la

Attraverso questa fase di riflessione e di comunicazione si può arrivare alla generalizzazione e quindi anche alla enunciazione di proprietà e alla definizione.

Supponiamo, per esempio, di aver posto il problema della somma degli angoli interni di un triangolo.

Ognuno dei ragazzi esegue diverse verifiche sui vari tipi di triangolo in modi diversi (o manipolando pezzi di cartoncino tagliati a forma di triangolo, o riportando e sommando gli angoli di un triangolo con riga e compasso) e ognuno di loro ottiene (quasi sempre!) l'angolo piatto. Emerge allora questa ipotesi: l'angolo somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, anzi questa ipotesi è così convincente da dare ai ragazzi la sicurezza che nei casi in cui non sono riusciti a ottenere l'angolo piatto è stato per errore o imprecisione di costruzione.

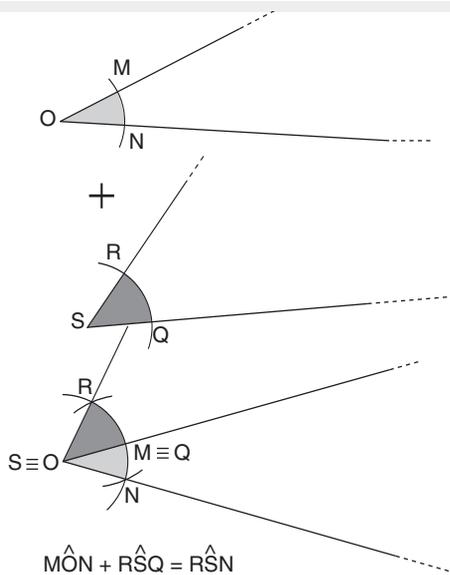
Verifica empirica di una proprietà con



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

Dal quaderno di Elisabetta
(classe 1A)

Naturalmente questa verifica empirica di una proprietà dei triangoli, anche se eseguita in molti casi, non può essere spacciata per una dimostrazione. I procedimenti di idealizzazione e di estrapolazione di proprietà a partire dall'esperienza concreta costitui-

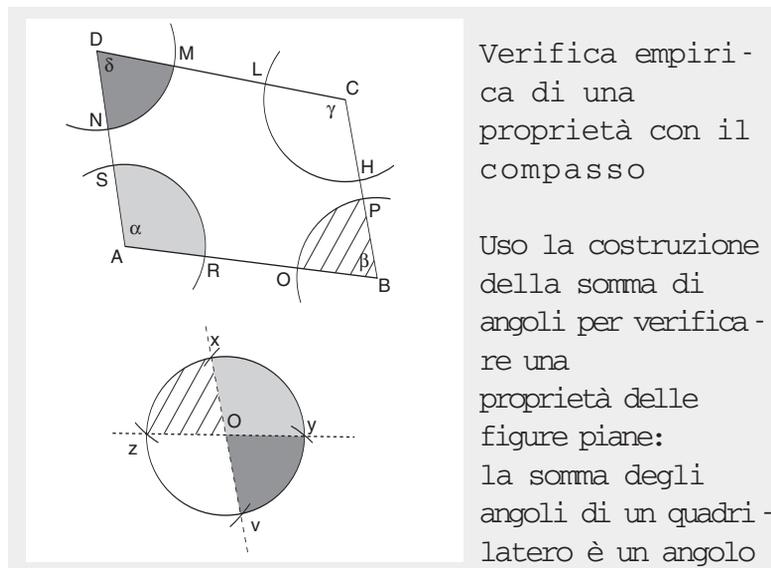


Sommare gli angoli con il compasso

- 1) Punto il compasso nei vertici e traccio con la medesima apertura un arco che intersechi i lati di ogni angolo, rispettivamente nei punti N, M e Q, R .
- 2) Traccio una semiretta di origine «o» e, sempre con la stessa apertura, puntando in o traccio un arco che intersechi la semiretta in N .
- 3) Partendo da N riporto sull'arco consecutivamente NM e QR .

scono un passo importante verso il ragionamento deduttivo ma se ad alunni di undici anni ci si può accontentare di dire che è possibile dimostrare, anche se loro non sono ancora in grado di farlo, che quella proprietà è vera per qualunque triangolo, occorre in seguito pensare delle occasioni di dimostrazione; sarebbe utile riuscire anche a progettare delle verifiche empiriche che si svolgano attraverso passi analoghi a quelli del procedimento dimostrativo.

Un'altra osservazione può riguardare le definizioni: quanto detto



rende evidente che le definizioni non costituiscono il punto di partenza di un lavoro, ma se mai un punto di arrivo.

Supponiamo, per esempio, di voler far lavorare i ragazzi sulla posizione reciproca di due segmenti nel piano: si può partire facendo disegnare coppie di segmenti in posizioni diverse, li si guida poi in una classificazione dei tipi di posizione e a dare un nome a ognuna di queste situazioni; si cercano poi le caratteristiche, comuni e non, delle diverse situazioni (non hanno punti in comune, ne hanno uno, quale, eccetera) e una volta individuata la proprietà tipica di ogni posizione si chiede ai ragazzi di scrivere le osservazioni fatte e le conclusioni.

È interessante sottolineare che queste vengono riassunte in una definizione di tipo operativo; per esempio: «due segmenti sono adiacenti quando li disegno su una retta uno dopo l'altro con un estremo in comune».

Tale definizione può ritenersi soddisfacente; infatti alla domanda «due segmenti adiacenti sono consecutivi?» quasi tutti rispondono con sicurezza di sì, e motivano la loro affermazione dicendo che

quando disegnano due segmenti adiacenti li fanno con un estremo in comune, come quelli consecutivi, ma in più li mettono su una retta.

Ecco che la definizione, elaborata dai ragazzi stessi sulla base di una precisa attività, diventa strumento efficace per riconoscere, distinguere, collegare le diverse posizioni.

Più in generale, si può dire che la definizione operativa costituisce un sicuro punto di riferimento per proseguire nel lavoro di osservazione e analisi ma anche per la successiva rielaborazione della definizione che condurrà il ragazzo a una ricomprensione del concetto stesso.¹

Ampliare il contesto

Un'ultima categoria di metodo emerge proprio in relazione all'esigenza che l'alunno possa ampliare sempre di più l'ambito di conoscenza dei concetti, che possa utilizzarli in altre situazioni e possa riprenderli in fasi successive per precisarli, approfondirli, generalizzarli. Ciò è possibile solo se il ragazzo si appropria con sicurezza dei concetti, delle regole, delle proprietà, delle definizioni costruite attraverso l'attività operativa che ha richiesto attenzione, pazienza, in alcuni casi fatica. Per questo motivo è necessario assegnare, volta per volta, dei «compiti» che aiutino a fissare ciò che ha appreso: fanno parte di questi compiti lo studio, che può prevedere anche la memorizzazione, e l'esecuzione di esercizi, anche ripetitivi.

Conclusioni

Possiamo ora trarre qualche conclusione circa gli esiti di uno stile di lavoro modulato secondo questi criteri.

Sempre più frequentemente le classi sono poco omogenee, ma ho potuto verificare che un'impostazione di tipo operativo dell'attività didattica permette a tutti gli alunni di lavorare.

Il ragazzo capace va a fondo delle questioni, si entusiasma e procede nel cammino dell'apprendimento superando passo passo il livello che è arrivato a dominare; il ragazzo con difficoltà non si demotiva, vuole riuscire, capisce anche di arrivare solo fino a un certo punto, ma non si arrende, perché in un'attività che tenga conto della persona, i primi passi sono possibili per tutti, gli altri passi possono essere pensati e strutturati in modi diversi, i tempi e gli obiettivi del lavoro individuale possono essere adattati alla singola situazione.

Un altro risultato, abbastanza immediato, è relativo al rapporto degli alunni con la matematica, con l'impegno di lavoro richiesto e con i diversi momenti della vita scolastica. Partendo da un'attività di tipo operativo i ragazzi si «mettono in azione»: devono organizzare il

proprio banco e il proprio materiale, tagliare, disegnare, seguire le indicazioni su come usare gli strumenti, rispettare certe fasi di lavoro, scrivere, provare, riflettere sul «perché non mi viene», rifare, correggersi, spiegare, giustificare le proprie affermazioni, precisare la propria esposizione, ordinare le proprie osservazioni.

Tutto ciò rende i ragazzi protagonisti di una esperienza del «fare matematica»: è loro azione, è loro esperienza.

Nello stesso tempo i ragazzi capiscono che è stata la presenza dell'insegnante a consentire il loro agire e il loro imparare in quanto percepiscono che solo l'insegnante li ha potuti guidare fino in fondo in questo cammino fornendo indicazioni di metodo, materiali, strumenti ma soprattutto ha «in-segnato» dove e come guardare, ha condiviso chiavi di lettura dei problemi. I ragazzi, ciascuno con i suoi tempi, maturano la consapevolezza del valore di ogni momento dell'attività didattica per cui si abituanò all'attenzione durante la spiegazione, accettano e cercano il controllo dell'insegnante sul proprio lavoro, sono disponibili a correggersi, chiedono aiuto e indicazioni.

Anche i momenti della verifica e della valutazione vengono vissuti in modo diverso: durante il lavoro in classe l'alunno si è già messo alla prova, ha già affrontato e superato difficoltà, ha già avuto modo di rendersi conto di ciò che gli riesce con immediatezza e bene e di ciò che richiede maggiore attenzione e impegno, e tutto questo con la possibilità di un aiuto e di un confronto con l'insegnante; durante la verifica l'alunno capisce che «è alla resa dei conti», sperimenta se stesso in un lavoro autonomo e ... ne attende il giudizio.



A conclusione bisogna dire che quanto descritto non è però l'esito scontato di una buona programmazione e neppure di una puntuale applicazione di una metodologia: non possiamo eludere il fatto (del quale tutti abbiamo fatto esperienza) che la dinamica del conoscere, cioè del rapporto consapevole e costruttivo fra l'alunno e una disciplina, vive di un'altra dinamica che è quella del rapporto fra l'alunno e un maestro e tale dinamica contiene una misteriosa incognita: la libertà dell'alunno e del maestro.

**Docente di Matematica
Cusano Milanino*

¹Cfr.: A. Marazzini, «Parlare» matematica: esperienze alla scuola media, in: *Emmeciquadro* n.3, settembre 1998.