ARMONIA E INVENZIONE

UN PERCORSO DIDATTICO TRA FISICA MATEMATICA E MUSICA

a cura di Luigi Baldassarri e Doriana Fabiani***

Un progetto pluridisciplinare che ha coinvolto e appassionato docenti e studenti di due licei scientifici. Occasione efficace per scoprire la natura profonda della creazione musicale, frutto della genialità dell'artista, sempre però sostenuta dal rigore delle conoscenze fisiche e matematiche. Gli autori presentano in modo molto essenziale, ma puntuale, l'itinerario da essi percorso, e percorribile da altri, nella prospettiva di una possibile futura evoluzione, esito dell'esperienza compiuta.

Da una conversazione a tavola tra amici di scuole diverse è nata l'idea di un percorso che nella nostra scuola si è trasformato in un progetto; la formula è stata «testata» lo scorso anno durante la settimana culturale e nel corrente anno scolastico viene attuata coinvolgendo quattro classi quarte in orario curriculare.

Il titolo del progetto è: *Il cimento dell'armonia e dell'invenzione: percorso tra fisica, matematica e musica*

L'obiettivo del progetto è quello di inserire lo studio dell'acustica in un orizzonte più ampio in cui discipline diverse come la fisica, la matematica e la musica si intrecciano nella ricerca dell'armonia e dell'invenzione.

La realizzazione del progetto, che presuppone la conoscenza dei concetti fondamentali relativi alle onde meccaniche e ai fenomeni connessi, prevede tre fasi relative agli ambiti disciplinari coinvolti.

Per la fisica si studia l'acustica come base teorica per la costruzione degli strumenti musicali e per «mettere insieme» più suoni che possano produrre una sensazione piacevole, cioè costruire una tecnica musicale.

Per la matematica si tratta di interpretare i rapporti presenti nella tecnica musicale e nell'armonia delle forme presenti in natura e nell'arte.

Per la musica, attraverso l'ascolto e l'analisi di brani musicali, si vuole mettere in risalto l'intreccio (voluto o no) di costruzione razionale e libera invenzione.

*Luigi Baldassarri, insegna storia e filosofia e musica al liceo scientifico di Recanati.
**Doriana Fabiani insegna matematica e fisica al liceo scientifico G. Galilei di Macerata.
Il progetto, coordinato da Baldassarri per la parte musicale, ha coinvolto classi dei due licei.
A Macerata hanno partecipato anche i docenti di matematica e fisica Sabina Ascenzi, Donatella Filippucci e Miriam Minocchi.

Prima fase: fisica

Utilizzando in modo sistematico il laboratorio di fisica vengono introdotti e/o ripresi i seguenti concetti: perturbazione sonora, sorgente sonora, onda sonora, suono e rumore; caratteri distintivi del suono (intensità, altezza, timbro); riflessione e onde stazionarie; interferenza e battimenti; risonanza. Di seguito si riporta lo schema degli esperimenti che vengono svolti.

ONDE ACUSTICHE	Suono - rumore	Oscilloscopio
MEZZO DI PROPAGAZIONE	Suono nell'aria Velocità del suono nell'aria	Campanello sotto campana di vetro Tubo di Kundt
FENOMENI CONNESSI CON LA PROPAGAZIONE IN UN MEZZO	Riflessione (eco, rimbombo) Risonanza Onde stazionarie	Molla Diapason (440 Hz) + casse di risonanza di varia lunghezza Corda elastica
PROPAGAZIONE DI DUE O PIU' ONDE	Interferenza Battimenti	Oscilloscopio + diapason Oscilloscopio + 2 diapason di frequenza diversa
CARATTERI DISTINTIVI DEI SUONI	Intensità Altezza Timbro	Oscilloscopio + diapason
EFFETTO DOPPLER		Diapason di frequenza 1 400 Hz

Dopo lo studio dell'acustica nella fisica dei fenomeni ondulatori, si comincia il percorso dell'acustica nella musica che si sviluppa in due direzioni: l'analisi degli strumenti musicali e la costruzione della teoria musicale.

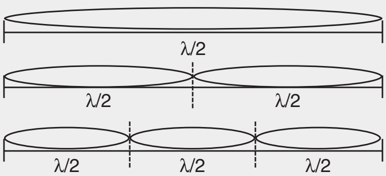
Analisi degli strumenti musicali

Gli strumenti musicali vengono divisi in tre categorie: strumenti a corda, strumenti a canne, strumenti a percussione. Per ogni gruppo si specifica che, mettendo in vibrazione (con diverse tecniche e mezzi che vengono precisate) gli elementi caratteristici di quel tipo di strumenti (corde, canne, piastre o membrane) si generano su di essi onde stazionarie che producono il suono.

Strumenti a corda Il suono è prodotto da onde stazionarie trasversali generate da corde tese fissate ai due estremi. Le corde possono essere messe in vibrazione per mezzo di: (1) percussioni con piccoli martelletti (pianoforte) (2) pizzicate (chitarra, arpa) (3) sfregamento con un arco (archetto) costituito da una bacchetta di legno flessibile e da una striscia di crini di cavallo tesi (violino, famiglia delle viole).
Strumenti a canne I suoni sono dovuti a onde stazionarie longitudinali di colonne d'aria in opportuni contenitori (canne d'organo, tubi strumenti a fiato. Le vibrazioni delle colonne d'aria si ottengono soffiando aria nel tubo attraverso l'«imboccatura» che può essere: (1) naturale o a flauto (flauto, ottavino) (2) ad ancia semplice libera (armonium, fisarmonica) (3) ad ancia semplice battente (clarinetto, saxofono) (4) ad ancia doppia (oboe, fagotto, strumenti a bocchino)
Strumenti a percussione I suoni sono prodotti da onde stazionarie generate su oggetti bidimensionali vibranti (piastre, membrane). Le vibrazioni si ottengono tramite percussione del sistema vibrante.

Un'analisi dettagliata delle onde stazionarie che si possono produrre su corde tese, canne aperte alle due estremità, canne aperte a una sola estremità e superfici messe in vibrazione porta a tre conclusioni.
Inannzitutto: una corda (perfettamente flessibile) fissata agli estremi o una canna aperta alle due estremità possono vibrare secondo infiniti modi, aventi frequenze multiple rispetto alla frequenza del suono fondamentale.

Se L è la lunghezza della corda, fissata agli estremi, le onde stazionarie che si producono devono avere due nodi alle estremità



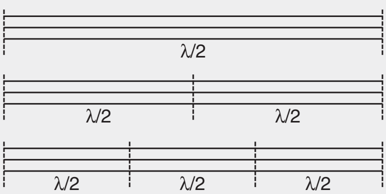
$L = \frac{\lambda_1}{2}$; $f_1 = \frac{\nu}{2L}$

$L = 2\frac{\lambda_2}{2}$; $f_2 = 2\frac{\nu}{2L}$

$L = 3\frac{\lambda_3}{2}$; $f_3 = 3\frac{\nu}{2L}$

La condizione per la formazione delle onde stazionarie è dunque $\lambda_n = \frac{2L}{n}$; $f_n = n\frac{\nu}{2L}$ con $n = 1,2,3,.....$
dove per n = 1 si ha il primo modo di vibrazione, per n = 2 il secondo e così via.
Ricordando che le frequenze dei vari modi di vibrazione sono:

Se L è la lunghezza della canna, aperta agli estremi, le onde stazionarie che si producono devono avere due ventri alle estremità,



$L = \frac{\lambda}{2}$; $f_1 = \frac{\nu}{2L}$

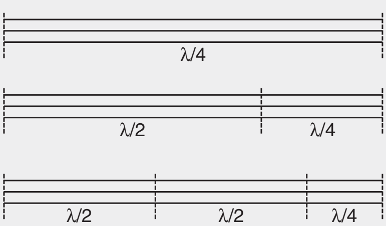
$L = 2\frac{\lambda}{2}$; $f_2 = 2\frac{\nu}{2L}$

$L = 3\frac{\lambda}{2}$; $f_3 = 3\frac{\nu}{2L}$

La condizione per la formazione delle onde stazionarie è dunque $\lambda_n = \frac{2L}{n}$; $f_n = n\frac{\nu}{2L}$ con $n = 1,2,3,.....$
dove per n = 1 si ha il primo modo di vibrazione, per n = 2 il secondo e così via.

In secondo luogo: una canna chiusa a una estremità può vibrare soltanto secondo frequenze che sono multiple dispari della frequenza del suono fondamentale.

Se L è la lunghezza della canna, chiusa a una estremità, le onde stazionarie che si producono devono avere un nodo e un ventre alle estremità, cioè:



$L = \frac{\lambda_1}{4}$; $f_1 = \frac{\nu}{4L}$

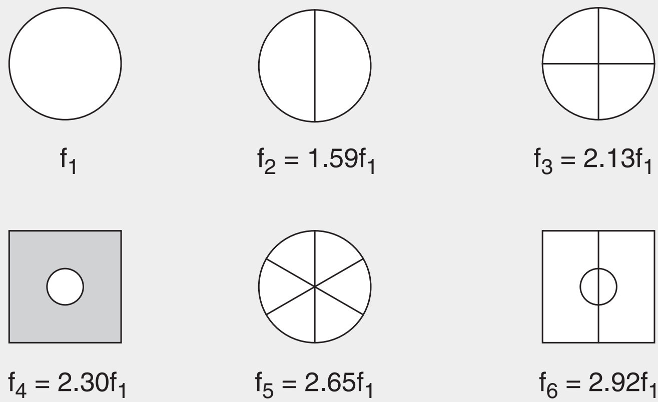
$L = 3\frac{\lambda_2}{4}$; $f_2 = 3\frac{\nu}{4L}$

$L = 5\frac{\lambda_3}{4}$; $f_3 = 5\frac{\nu}{4L}$

La condizione per la formazione delle onde stazionarie è dunque $\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$; $f_n = \frac{\nu}{4L}(2n-1)$ con $n = 1,2,3,.....$
dove per n = 1 si ha il primo modo di vibrazione, per n = 2 il secondo e così via.

Infine: superfici vibranti, come le piastre elastiche o le membrane tese, hanno numerosi modi di vibrazione, ciascuno caratterizzato da una certa frequenza e da una certa distribuzione delle linee nodali sulla superficie stessa.

I primi sei modi di vibrazione di una membrana circolare vincolata al bordo (TAMBURO) sono:

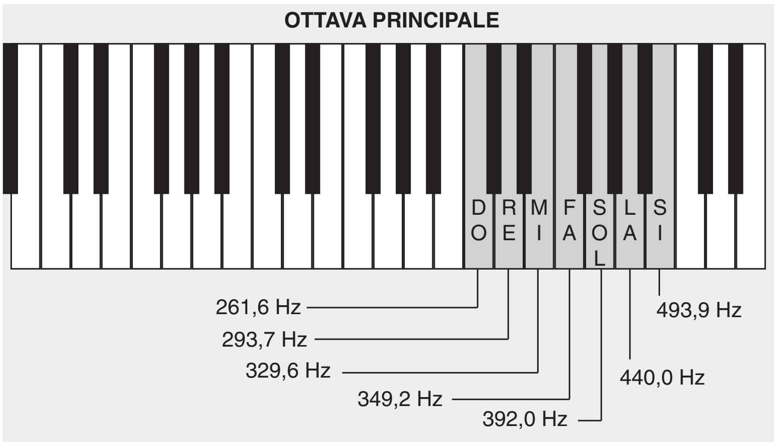


È interessante, a questo punto, far notare come per gli strumenti a percussione, a differenza degli altri, le frequenze dei vari modi non sono in generale multiple della frequenza fondamentale e quindi non stanno tra loro in un rapporto semplice: è questo il motivo per cui il suono emesso da un tamburo è meno «musicale» di quello emesso da uno strumento a corda o a fiato e, talvolta, si avvicina piuttosto a un rumore.
Dall'analisi fatta si arriva a concludere che quando eccitiamo l'oggetto vibrante il suono che otteniamo e' la sovrapposizione di tanti suoni sinusoidali (suoni puri) uno per ogni modo di vibrazione e dunque, gli strumenti musicali non producono onde armoniche semplici (suoni puri) ma, tuttavia, i suoni emessi hanno una ben precisa frequenza e alle diverse frequenze corrispondono le diverse note dello strumento.

Acustica musicale

Partendo da una definizione piuttosto tecnica di musica come «combinazione (sovrapposizione) di suoni di diversa altezza (frequenza) che producano una sensazione piacevole (onde acustiche periodiche)», si vuole arrivare a focalizzare i punti salienti della costruzione di una teoria musicale. Poiché si ha una sensazione piacevole quando si sovrappongono due suoni le cui frequenze stanno in rapporto semplice, questo diventa un un elemento discriminante per la costruzione delle scale musicali.

Prima di scendere un po' di più nel dettaglio delle scale, si mostra, al computer, che la sovrapposizione di onde armoniche di frequenze che stanno in rapporto semplice (per esempio 2:1, 5:4, 4:3, 3:2) danno come sovrapposizione una «oscillazione piacevole" anche a vedersi, al contrario della sovrapposizione di onde armoniche di frequenze che non stanno in rapporto semplice (per esempio quella prodotta da una dissonanza).
Il percorso attraverso le scale musicali parte dalla «scala musicale naturale» (secondo Guido D'Arezzo) nella quale si distinguono sette note fondamentali (do - re - mi - fa - sol - la - si) in ordine crescente di frequenza.



Due note sono separate da un intervallo (rapporto fra le frequenze) e, in particolare, due note con frequenze una doppia dell'altra hanno lo stesso nome e sono separate dall'intervallo di una ottava. Facendo riferimento alla costruzione degli strumenti musicali, il passaggio di una ottava si realizza dimezzando una dimensione del sistema vibrante (corda o colonna d'aria).

GLI INTERVALLI DELLE SETTE NOTE DI UNA OTTAVA RISPETTO AL DO

DO	**RE**	**MI**	**FA**	**SOL**	**LA**	**SI**	**(DO_2)**
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	(2)

GLI INTERVALLI TRA DUE NOTE CONSECUTIVE DI UNA OTTAVA

DO		**RE**		**MI**		**FA**		**SOL**		**LA**		**SI**		**(DO_2)**
	9/8		10/9		16/15		9/8		10/9		9/8		16/15	

L'intervallo di 9/8 si chiama «tono maggiore».
L'intervallo di 10/9 si chiama «tono minore».
L'intervallo di 16/15 si chiama «semitono maggiore».
L'intervallo di 25/24 si chiama «semitono minore».

Poiché gli intervalli che separano le note successive di ciascuna ottava non sono tutti uguali, cioè non si sale di tono allo stesso modo passando da una nota all'altra, e poiché l'orecchio umano è in grado di apprezzare molto bene anche intervalli minori di quelli sulla scala naturale, si è arricchita la scala inserendo un'altra nota (diesis o bemolle) tra due consecutive che differiscono di un tono (maggiore o minore). La nota chiamata diesis si ottiene moltiplicando la frequenza della nota precedente per 25/24; la nota chiamata bemol-

le si ottiene dividendo la frequenza della nota seguente per 25/24. Tale scala prende il nome di «scala cromatica» e in essa i rapporti fra le frequenze sono uguali a rapporti fra numeri interi.
Infine in tutti gli strumenti con gruppi di note fisse, come il piano, il clarinetto e l'organo è adottata la «scala temperata», nella quale ogni ottava è divisa in 12 intervalli (semitoni) uguali tra loro e ciascuno pari a 21/12 = 1,059 perciò in essa la frequenza di ciascuna nota si ottiene moltiplicando per 1,059 quella della nota precedente.
Per concludere si fissa l'attenzione sugli intervalli che producono sensazione piacevole: le loro frequenze sono in rapporto semplice e vengono detti «accordi» e «accordi consonanti».

Gli accordi consonanti che piu di altri producono sensazione di armonia sono quelli di:

ottava	(rapporto 2:1)
terza maggiore	(rapporto 5:4)
quarta	(rapporto 4:3)
quinta	(rapporto 3:2)

Gli intervalli che producono sensazione sgradevole sono chiamati «dissonanze». Questi tipi di suono possono essere fatti «sentire» e anche «vedere» sull'oscilloscopio.

Seconda fase: matematica

Un primo intervento viene svolto mentre si introducono le scale musicali: si prende in esame il contributo della scuola pitagorica (VI sec. a.C.), che fonde in una sola disciplina astronomia, geometria, musica e aritmetica («ogni singola cosa è formata dalla potenza dell'Uno, e quell'Uno si chiama Armonia, parola che significa anche ottava»).
In particolare si esaminano alcuni degli intervalli che sono stati individuati: ottava, in cui la lunghezza della seconda corda è metà di quella della prima; quinta, in cui la lunghezza della seconda corda è 2/3 di quella della prima; quarta, in cui la lunghezza della seconda corda è 3/4 di quella della prima.
I pitagorici secondi (II sec. a.C.), confrontando le frazioni che esprimono i rapporti musicali che il monocordo consentiva di stabilire, notarono che in esse il numeratore superava di una unità il denominatore, come 2/1 l'ottava, 3/2 la quinta, 4/3 la quarta, 9/8 il tono (maggiore). Ciò contribuì a provare che le cose sono imitazione dei numeri, ipotesi centrale della concezione filosofica dei pitagorici, che consideravano il numero come principio primo della realtà.

A questo punto si potrebbe prevedere un approfondimento in ambito filosofico; nel nostro progetto, anche per il numero di ore a disposizione, ci limitiamo a esaminare il significato fisico di tali rapporti e ad analizzare al computer i grafici che risultano dagli accordi relativi.
Un secondo momento di lavoro si svolge in connessione con l'analisi dei brani musicali scelti. Quando vengono coinvolti i concetti di sezione aurea e di progressione geometrica, la riflessione matematica serve essenzialmente a introdurli e/o ricordarli.
Ma il riconoscimento della presenza di certi rapporti non è assolutamente un fatto tecnico: è interessante rendersi conto che accorgersi di certe regolarità e utilizzarle è un'esperienza che ha attraversato la storia dell'attività umana coinvolgendo campi affini ma anche apparentemente lontani.
Per rendere evidente tale dinamica viene utilizzato il concetto di sezione aurea perché è più ricco e più immediato.
Viene data la definizione di sezione aurea, ne viene fornita una costruzione geometrica utilizzando il *software* didattico *Cabri* con cui si costruisce anche l'equazione associata; si fa notare che, se i coefficienti dell'equazione sono razionali, la soluzione è irrazionale.
Si torna alla storia della matematica, e di nuovo alla scuola pitagorica, cui sono attribuiti i primi studi sulla sezione aurea. Si portano poi esempi di alcuni oggetti geometrici in cui tale rapporto è stato riconosciuto o applicato (rettangolo aureo, decagono regolare, pentagono regolare e stella a cinque punte) mettendo in evidenza la caratteristica ricorsiva, il fatto cioè che si autoriproduce.
Ma la forma di tale «prezioso gioiello», come viene chiamato da Keplero il rapporto aureo, non si rinviene solo in geometria; a documentazione di ciò viene presentata la successione di Fibonacci e viene fatto notare come il rapporto tra un elemento e il suo successivo varia avvicinandosi indefinitamente proprio al rapporto aureo.
Viene anche fatto notare come, se si costruisce una sequenza di rapporti in cui si conserva la relazione aurea tra le nuove grandezze

$$(1-x):x = x:1 = \mathbf{1}:(\mathbf{1}+x) = (1+x):(\mathbf{2}+x) = (2+x):(\mathbf{3}+\mathit{2}x) = (3+2x):(\mathbf{5}+\mathit{3}x) =$$
$$= (5+3x):(\mathbf{8}+\mathit{5}x) = (8+5x):(\mathbf{13}+\mathit{8}x) = (13+8x):(\mathbf{21}+\mathit{13}x) \ldots\ldots$$

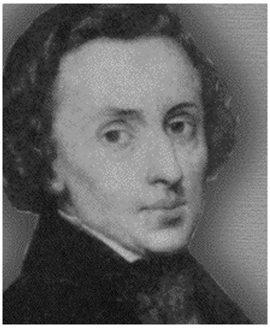
le sequenze numeriche così ottenute indicano proprio la stretta correlazione con lo sviluppo della successione di Fibonacci.
Si conclude poi con alcuni esempi della presenza del rapporto aureo in natura e in arte.

Si potrebbe approfondire il concetto di progressione geometrica, ma nel nostro progetto se ne richiamano solamente le nozioni essenziali

Terza fase: musica

L'obiettivo fondamentale del primo ascolto guidato è smentire una certa pretesa istintività o irrazionalità della musica attraverso l'analisi di un brano «canonico» nella storia della musica come la *Ciaccona* dalla *Partita per violino solo in re minore* di J.S. Bach.
Per capire l'analisi dei brani è necessario fare una premessa in cui si spiega come viene trattato il tempo in musica e come sono organizzate le altezze, sia diacronicamente che sincronicamente. Vengono quindi introdotti i concetti di tempo, misura e movimento, poi quello di tonalità e infine quello di consonanza e dissonanza.
Le considerazioni sviluppate vengono poi applicate al brano in esame: al tempo 3/4 e alla tonalità di re minore in cui il pezzo è composto.
Attraverso l'uso di un *software* di scrittura musicale vengono evidenziati i principali elementi del tema della *Ciaccona*, facendoli ascoltare prima separatamente poi insieme.
Viene poi analizzata la struttura del brano secondo il basso ostinato e secondo la melodia superiore, facendone notare, seguendo lo studio del musicologo P. Marconi, la duplice logica costruttiva. Da una parte il brano si presenta come generato dal numero 4, che corrisponde al numero delle battute dell'ostinato al basso: infatti le battute complessive del brano (256) corrispondono a 44, le ripetizioni dell'ostinato (64) a 43, e in alcune esecuzioni il brano dura 16 minuti, cioè 42. Accanto a questo schema se ne può trovare un altro che riguarda la durata delle tre sezioni di cui è costituito il pezzo e che contano rispettivamente 124, 76 e 48 battute: numeri che si approssimano il più possibile a un rapporto di sezione aurea tenuto conto che il compositore lavorava coi multipli di 4. Fin qui i numeri, ma il simbolismo suggerisce di affiancare ai numeri un significato: al 4 la terra, al 3 la divinità. Ecco così che le due logiche, quella meccanica, terrestre e quella spirituale, divina si fronteggiano, anche se quest'ultima è destinata a soggiogare la prima come ci dice l'indicazione del tempo 3/4 (tre su quattro !).
Analizzata così l'opera viene fatto ascoltare il brano, chiedendo di seguire per quanto possibile la struttura tripartita e la regolarità delle ripetizioni.

Volutamente, al termine dell'ascolto, si apre lo spazio delle domande. A questo proposito, una situazione interessante si è creata a fronte della domanda di un'insegnante che, riguardo alla musica contemporanea, voleva sapere il ruolo assunto dall'*alea* (cioè dal caso come strumento di composizione) e il significato dell'uso della dissonanza.
Il secondo ascolto guidato riguarda il *Preludio op. 28 n.15* (*La goccia*) di F. Chopin. L'intento, ancor più provocatorio, con cui viene presentato questo pezzo, è quello di far vedere come anche in un brano romantico, e per di più dichiaratamente in stile di improvvisazione, non mancano regolarità che possono essere studiate con strumenti matematici.
Vengono evidenziate, mediante il solito programma di scrittura musicale, melodie e «atmosfere» tipiche delle tre parti in cui è diviso il brano, facendo notare la particolarità compositiva della nota ribattuta che unifica il pezzo.
Quindi si analizza numericamente la presenza percentuale della nota ribattuta nella prima, seconda e terza parte, facendone rilevare la diversa incidenza che determina il diverso clima espressivo.
In modo analogo si procede per le note delle due melodie principali, di cui è stata calcolata la rilevanza percentuale. Le due melodie si sono rivelate molto simili da questo punto di vista, anche se diversissime da quello espressivo generale: entrambe le linee poi si sono mostrate complementari rispetto alla nota ribattuta che non compare quasi mai in esse.
Infine viene analizzato il rapporto fra il numero di battute della prima, seconda e terza parte rilevando come la parte lunga (la seconda) sta a quella media (la prima) come quella media a quella breve (l'ultima). Questi espedienti analitici si sono dimostrati utili per rendere più consapevole il successivo ascolto di simmetrie e complementarità che spesso vengono colte solo in maniera intuitiva ma costituiscono comunque un aspetto fondamentale del brano.
Alla fine dell'incontro si apre di nuovo il dibattito oppure si lascia uno spazio di tempo in cui gli alunni possano chiedere un aiuto per un lavoro personale di approfondimento sugli argomenti toccati nello svolgimento del progetto.
Per concludere, vogliamo sottolineare che abbiamo raccontato quanto realizzato finora, ma il progetto è attualmente in corso, quindi potrebbe aprirsi a ulteriori sviluppi.
Inoltre, per documentare la validità di una attività pluridisciplinare di questa ampiezza, che ha utilizzato ore curricolari, stiamo elaborando strumenti e strategie per verificare, e valutare, il livello di comprensione dei nessi esistenti tra le varie discipline raggiunto dagli studenti coinvolti nel progetto. V



Fryderyk Franciszek Chopin
(1810-1849)