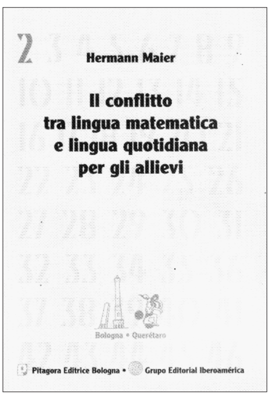
LINGUA MATEMATICA E QUOTIDIANA

CONSIDERAZIONI SU UN TESTO DI HERMANN MAIER

di Anna Paola Longo

Il linguaggio formale della matematica «scolastica» è molto lontano dalle abitudini linguistiche degli allievi di ogni livello di scolarità. Nascono spesso gravi difficoltà di apprendimento da parte degli studenti, ma anche di comunicazione da parte di chi insegna e di chi scrive libri di testo. L'autore riflette sulle caratteristiche della lingua matematica e ne individua le differenze con il linguaggio ordinario, suggerendo percorsi efficaci per superare i contrasti e le contraddizioni. Introducendo il lettore a una problematica di tipo linguistico intrinseca a ogni insegnamento scientifico che non dovrebbe essere ignorata, come purtroppo ancora troppo spesso accade, da chi insegna discipline letterarie.



Un testo di Hermann Maier, *Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi*, pubblicato nel 1998 in collaborazione dalla Editrice Pitagora di Bologna e dal Gruppo *Editorial Iberoamérica*, tratta brevemente, ma con grande efficacia, di alcune problematiche linguistiche molto importanti nella scuola, per qualsiasi ordine di insegnamento. Incomincia con una chiara definizione dell'obiettivo: illustrare la diversità delle convenzioni della lingua quotidiana e della lingua matematica; proporre la necessità di far prendere familiarità agli allievi con una lingua, differente da quella che usano correntemente, che subisce l'influenza del linguaggio formale della matematica scolastica; formulare suggerimenti per la collaborazione tra insegnanti di matematica e di lingua. Per porre il problema della vasta gamma di difficoltà generate dalla lingua nell'insegnamento della matematica, l'autore si serve di quattro esempi, che presenta all'inizio dell'opera, e a cui fa costante riferimento nel seguito. Li riporto brevemente.

Primo esempio

Allievi di quattordici anni. Un ragazzo descrive per mezzo di un testo una rappresentazione geometrica e un altro deve eseguire la figura servendosi solo del testo fornito dal compagno. Emergono difficoltà nel descrivere la direzione delle rette e le relazioni tra le rette e i punti di intersezione. Ogni retta non parallela ai bordi del foglio viene chiamata «inclinata»o «in diagonale», per descrivere posizioni reciproche vengono usate parole come «al di sopra», «al di sotto», «a destra», «a sinistra», «vicino a». La parola «verticale» è utilizzata per designare una parallela ai lati (sinistro o destro) del foglio e non in senso geometrico, cioè in relazione ad altre rette o piani. Gli allievi hanno usato parole della lingua quotidiana, poco precise e non appropriate per una descrizione geometrica. Pertanto i testi non sono risultati sufficientemente precisi per servire da guida alla riproduzione di una rappresentazione geometrica.

Secondo esempio

Allievi di dieci/undici anni. L'insegnante, per introdurre la nozione di sottoinsieme, evoca il senso della preposizione «sotto», che designa una parte di un tutto e, dopo la lezione, dà il seguente esercizio scritto di applicazione.

Sono dati i seguenti insiemi:
A = {a,b,c,d}, B = {b,c}, C = {a,c,e,f}, D = {b,c,d}
Si chiede di trovare:
tutte le parti e tutte le relazioni dei possibili sottoinsiemi.

Molti non scoprono le intersezioni perché manca il riferimento alle rappresentazioni con i diagrammi di Venn (per esempio i cerchi che si usano frequentemente per rappresentare gli insiemi). Molti non trovano la relazione tra A e D, nessuno indica la relazione di un insieme con se stesso, anche se hanno incontrato più volte la proposizione: «Ogni insieme è sottoinsieme di sé stesso». Si può supporre che molti allievi siano stati maggiormente impressionati dalla spiegazione di sottoinsieme come «parte di un insieme» piuttosto che da questa proposizione.

Terzo esempio

Allievi di undici/dodici anni. Hanno studiato in tempi diversi il cubo e il parallelepipedo come forme geometriche. Nell'ultima lezione l'insegnante ha cercato di spiegare che un cubo è un particolare parallelepipedo, ma non riesce a far capire questa classificazione a molti allievi. L'ostacolo risale all'introduzione, infatti nella prima lezione l'insegnante aveva chiesto agli allievi: «Qual è la differenza tra un cubo e un parallelepipedo?», scrivendo sulla lavagna le rispettive proprietà in due colonne distinte, secondo le risposte degli allievi. È apparso in seguito che questa introduzione era in opposizione con l'intuizione degli allievi.

Quarto esempio

Allievi di dieci/undici anni. Sul libro di testo si legge: «Per moltiplicare un numero per 10, si aggiunge uno zero alla fine del numero dato».
Nell'anno seguente molti allievi applicano questa regola ai decimali scrivendo uguaglianze di questo tipo: 4,5 x 10 = 4,50. Hanno applicato la regola appresa un anno prima: nessuno aveva spiegato loro che tale regola deve essere limitata ai numeri interi.

Caratteristiche della lingua matematica

Maier inserisce l'analisi di questi quattro esempi in un discorso globale sulle caratteristiche della lingua matematica, in cui specifica immediatamente che le difficoltà non sono solo degli allievi, ma anche dei manuali scolastici e degli insegnanti. Inizia notando che la matematica ha sviluppato una sua lingua particolare per evitare ambiguità nella comunicazione. Tale lingua è ormai molto formalizzata e perciò non può essere integralmente utilizzata a scuola come base della comunicazione tra l'insegnante e gli allievi. Ma ugualmente va approfondita la conoscenza delle sue specificità e perseguito il suo apprendimento nel tempo.
Per questo scopo, consideriamo alcune caratteristiche della lingua matematica e le sue differenze rispetto alla lingua quotidiana.
I termini con cui i ragazzi descrivono lo spazio nel primo esempio si riferiscono all'orientamento naturale, che è in funzione della gravità, e per questo non sono in accordo con la descrizione matematica dello spazio, che non ha direzioni privilegiate. Il pensiero e la lingua matematica si riferiscono a oggetti ideali e non a oggetti reali. I modelli reali sono distinti dalla nozione matematica a cui si riferiscono a causa dell'astrazione (passaggio dall'«oggetto» alla «classe di oggetti») e dell'idealizzazione (passaggio dall'«oggetto reale» alla sua «immagine ideale» mediante il passaggio intermedio della costruzione del modello). Perciò il pensiero e la lingua matematica superano l'esperienza e sono indipendenti da ogni legame diretto con la realtà. Chiaramente con questa affermazione l'autore descrive la natura della matematica e non si riferisce al suo insegnamento, in cui occorre passare attraverso la realtà per accedere all'astrazione, e mostrare poi il senso dell'astrazione rispetto alla conoscenza della realtà. Maier ne è consapevole, infatti avvisa che l'uso di immagini/esempi come modalità di costruzione di nozioni matematiche, pur essendo necessario, deve essere prudente, affinchè la comprensione degli allievi non rimanga fissata o legata ai modelli e alle immagini. È proprio questo che, nel secondo esempio, ha impedito ad alcuni allievi di applicare correttamente la nozione di sottoinsieme.
Il carattere ideale della matematica ha una conseguenza: le nozioni matematiche devono essere costruite come «descrizioni discorsive», la cui forma più elaborata è la definizione. Nel terzo esempio, solo un'analisi attenta delle definizioni avrebbe permesso agli allievi di comprendere la classificazione delle nozioni di cubo e parallelepipedo.
La lingua matematica ha l'ideale della «non equivocità»: il significato di ogni termine o simbolo è perfettamente definito circa il suo obiettivo e la sua estensione; si devono evitare le omonimie e i sinonimi. Nel primo esempio era stato usato il termine del tutto generico «inclinato» per indicare tutte le direzioni tranne l'orizzontale; nel secondo esempio i significati di «sottoinsieme» e «parte» non erano stati descritti in modo esplicito. La polisemia in matematica esiste, ma non avviene mai all'interno di uno stesso testo, mentre può avvenire passando da un testo a un

altro (infatti ciascun testo definisce i suoi termini in modo univoco). Ecco l'esempio di Maier: la parola «altezza»può designare in testi diversi una retta, un segmento o un numero.
I matematici possono usare termini e proposizioni della lingua quotidiana variandone parzialmente o totalmente il senso: la parola «simile» si riferisce a figure tra cui intercorre un rapporto di proporzionalità (è dunque specificato in modo inequivocabile e verificabile il criterio della somiglianza). Questo uso specifico e irrigidito dei termini può provocare interferenze che influiscono negativamente sulla comprensione del linguaggio e dunque delle nozioni matematiche. Nel secondo esempio, l'insegnante ha spiegato la parola «sottoinsieme» a partire dalla lingua quotidiana: l'errore è di non aver indicato chiaramente la differenza tra la definizione matematica e il significato corrente, permettendo che si sovrapponessero.
Alcune proposizioni sono usate dai matematici in un modo che differisce da quello della lingua quotidiana: «c'è una mela nel sacco» nella vita quotidiana significa che il sacco contiene una sola mela, mentre nel linguaggio matematico significa che il sacco può contenere una o più mele ($n > 1$ oppure $n = 1$). L'espressione matematica del significato attribuito dalla comprensione corrente è: «c'è una e una sola mela nel sacco».
Il fatto che i vocaboli usati nella lingua matematica appartengano anche alla lingua quotidiana non è una facilitazione per la comprensione della matematica. Per passare al significato matematico di un termine occorre un affrancamento dal suo senso comune; infatti il senso di una parola o di un simbolo in un testo di matematica non può essere affermato in modo intuitivo, ma è oggetto di definizione: la lingua matematica e la sua interpretazione sono legate solo a riferimenti espliciti e controllabili. Nel quarto esempio l'autore del manuale non ha dato informazioni sul campo di applicazione della proposizione. E gli allievi, che hanno esteso il campo di applicazione dagli interi ai decimali, non sono entrati in contraddizione con le regole della lingua matematica. Quanto detto comporta che nell'insegnamento si debbano «negoziare» i significati e fare un lungo lavoro per far comprendere le definizioni. Maier aggiunge un'osservazione: tutti i significati vanno ricercati sul testo che si sta leggendo, senza mai darli per scontati; l'ascoltatore, o il lettore, per comprendere non deve aggiungere conoscenze personali precedenti, che non siano fornite dal testo, e questo introduce una buona regola di autocontrollo per chi sta imparando a studiare la matematica.
La lingua matematica è consequenziale: un predicato deve essere conforme alla definizione matematica del soggetto. Per esempio, la frase «l'insieme A è più lungo dell'insieme B» non è consequenziale (cioè non può avere conseguenze di nessun tipo), perché la lunghezza non è una proprietà di un insieme. La domanda del terzo esempio: «Qual è la differenza tra un cubo e un parallelepipedo?» è in contraddizione con la proposizione: «un cubo è un parallelepipedo particolare»; si tratta di una seconda forma di non-consequenzialità che riguarda non una singola proposizione ma un testo, in quanto alcune sue proposizioni sono in con-

traddizione tra loro. Attraverso l'uso del simbolismo specifico, la lingua matematica raggiunge un alto livello di densità. Osserviamo che se per una composizione in lingua italiana la brevità può essere ritenuta un difetto (eccessiva sinteticità, che sorvola sui particolari), al contrario essa è un pregio per lo svolgimento di un compito di matematica.

La comunicazione in classe

Gli insegnanti sono spesso convinti, in buona fede, di non poter rispettare, in classe, le regole fondamentali della lingua matematica, a causa della scarsa competenza linguistica degli allievi. Ma la riflessione condotta sugli esempi iniziali mostra il pericolo che c'è nel non conformarsi alle regole della lingua matematica e per contrasto l'importanza di seguirle. Rassicura il fatto che, come Maier precisa, si tratta di una competenza che si sviluppa nel tempo.
Infatti, «non si tratta di seguire le regole della lingua matematica come obiettivo in quanto tale, se questo nuoce alla comprensione delle nozioni tecniche, dei teoremi e degli algoritmi, se è parassita alle spiegazioni dell'insegnante e ai commenti degli allievi, invece di favorirli. Ma è necessario considerarle (le regole della lingua matematica) come elementi dell'insegnamento della matematica, aventi come scopo l'aumento della comunicazione all'interno della classe e sul soggetto di cui si tratta. In altre parole: gli allievi devono mostrarsi capaci "tappa par tappa" di accrescere la loro comprensione in matematica e, allo stesso tempo, la loro competenza nel comunicare le idee matematiche nel rispetto delle regole sopraccitate». Osserviamo che questo aspetto dinamico (imparare è infatti descritto come una storia) cancella potenzialmente ogni obiezione. «Tappa per tappa» interpella infatti la continuità: ogni insegnamento matematico serio avviene a lungo termine, d'accordo con quanto afferma più volte G. Vergnaud nelle sue opere (bibliografia).
È importante aggiungere alle considerazioni di Maier questa ulteriore osservazione: se nella scuola si punta principalmente alle applicazioni pratiche della matematica e non all'educazione del pensiero matematico, facilmente si perde la sensibilità al linguaggio specifico. «Gli strumenti e le proprietà della lingua matematica devono rimanere un elemento importante di orientamento e apparire quali obiettivi specifici della comunicazione discorsiva dell'insegnamento della matematica. Una delle principali difficoltà in questa comunicazione riguarda la linea di demarcazione tra lingua quotidiana e lingua tecnica».
Notiamo che la comunicazione discorsiva non consiste nel fatto che l'insegnante parla agli allievi e gli allievi ascoltano. È anche una comunicazione degli allievi all'insegnante, diversa dall'interrogazione (come sottolinea anche C. Laborde), e degli allievi tra loro, e presume che il contenuto dell'insegnamento non sia solo il calcolo con le sue tecniche mnemoniche, che potrebbe limitarsi a una serie di calcoli non accompagnati

da parole. Dice Maier, quando parla delle caratteristiche della matematica: «Il carattere ideale della matematica significa che le nozioni matematiche devono essere edificate principalmente come descrizioni discorsive, la cui forma più elaborata è la definizione. Al di fuori di queste descrizioni o di queste definizioni, niente può dare un'idea allo stesso tempo precisa e globale della nozione stessa e della maniera adeguata di impegnarla.» È importante il fatto che Maier non leghi la descrizione discorsiva a un solo livello scolastico, in particolare alla scuola elementare, in cui sono già in atto metodi di questo tipo. Ciò pone un interrogativo forte per tutti i tipi di scuola, comprese la scuola media e la scuola superiore.

La collaborazione con gli insegnanti di lingua

L'autore si chiede se possa esserci un'influenza positiva degli insegnanti di lingua ai fini della comprensione della lingua matematica e suggerisce che al confronto di vari testi letterari tra loro venga aggiunto anche quello di testi matematici e scientifici.
Confrontando un testo di matematica con uno di biologia si trovano in entrambi coppie in opposizione: concreto/astratto, particolare/generale, eccetera. In un testo di matematica si fa di tutto per evitare la «non chiarezza», invece in un testo letterario si usa con molta libertà la polisemia e la metafora. Un testo di matematica mira all'obiettività, chiarezza e autocoerenza, invece in letteratura si valorizza la soggettività e la necessità di interpretazione. La descrizione matematica segue un processo di deduzione logica e non una cronologia di avvenimenti; non può intervenire alcuna espressione di soggettività. Alla densità di un testo matematico si contrappone la ridondanza di un testo letterario. Sia in lingua che in matematica il senso di una parola varia secondo le situazioni di comunicazione e secondo il contesto. In campo letterario il senso delle parole è delimitato dall'ambito linguistico, in matematica dalla definizione: il comportamento degli allievi nei due casi è diverso.

Conclusione

Il contenuto di questo testo non risolve da solo le difficoltà che si incontrano nell'insegnare e imparare la matematica, ma è un contributo molto significativo in questo senso. Non tratta di questioni secondarie riservate ai «bravi», in quanto mentre sottolinea il significato autentico della matematica e il posto del linguaggio specifico in questo sapere, contemporaneamente mostra come il rispetto delle caratteristiche linguistiche specifiche, una volta che esse siano padroneggiate, renda più agevole la comunicazione e sia quindi una effettiva facilitazione per la comprensione. Inoltre incoraggia gli insegnanti ad avere fiducia nella possibilità di un uso effettivo di un buon linguaggio, perché ne mostra la natu-

ra evolutiva, che implica la possibilità di usare il tempo a favore del successo formativo. La domanda a cui il testo conduce è dunque essenzialmente sul modo di realizzare il tipo di lavoro scolastico proposto da Maier e su questo vorrei spendere ancora qualche parola.
Penso che ciascun insegnante debba partire dall'imparare i criteri suggeriti dall'autore, che è di più del leggere e assentire. Occorre trovare numerosi esempi ripensando il proprio personale sapere e non fossilizzandosi solo su ciò che si insegna. Solo questo permette di rileggere il proprio sapere in modo più profondo e di trovare poi le strade per comunicarne le caratteristiche in modo non frammentario.
Per esempio, a riguardo della polisemia, si potrebbe analizzare la parola «equivalenza» in matematica e seguire i suoi significati: frazioni equivalenti, disequazioni equivalenti, funzioni equivalenti (coppie di funzioni per le quali il limite è 1 in un punto prestabilito) fino a giungere alla relazione di equivalenza. Per l'interferenza, si potrebbe considerare il termine «solido», che nella lingua comune è un aggettivo (robusto, eccetera), mentre in geometria indica una forma tridimensionale. Oppure, se si considera il termine matematico «frazione», e si torna alla sua radice «frangere», si nota che i termini della lingua italiana che derivano dalla stessa radice non hanno mai il riferimento al fatto che le parti siano uguali e si valuta bene la possibilità dell'interferenza.

Per quanto riguarda l'inclusione tra insiemi, si possono aggiungere casi simili. Per esempio, secondo la logica del linguaggio scientifico, è corretto dire che «l'uomo è un animale», poiché l'uomo è davvero un elemento dell'insieme degli animali in quanto elemento di un suo particolare sottoinsieme: ha tutte le caratteristiche comuni agli animali, più altre caratteristiche specifiche, quelle del sottoinsieme a cui appartiene. Invece nel discorso comune questa frase può suscitare opposizione perché può essere interpretata come una identificazione totale. Dunque la diversità rispetto all'inclusione si estende attraverso la matematica a tutto il linguaggio scientifico ed è importante notarlo per comprendere il significato di un testo. Passiamo poi al livello specifico dell'insegnamento. Mentre nella scuola elementare e media è fondamentale il lavoro sul lessico, abbinando la ricerca di significati sia della lingua comune che del linguaggio specifico, nella scuola superiore diventa sempre più importante lo studio delle caratteristiche di un testo. Qui l'approfondimento è notevole e si dovranno certamente aggiungere altri elementi. v

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

E. Fischbein, G. Vergnaud, *Matematica a scuola, teorie ed esperienze*, Pitagora, Bologna 1992.
C. Laborde, *Language and mathematics*, in *Mathematics and cognition*, Cambridge 1990.
H. Maier, *Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi*, Pitagora, Bologna 1998.
G. Vergnaud, *Il bambino, la matematica, la realtà*, Armando, Roma 1994.