ESPERIENZA E APPRENDIMENTO

COSTANTI DI METODO NELL'INSEGNARE MATEMATICA

*di Anna Paola Longo**

L'opinione comune spesso riduce la matematica al solo aspetto astratto e formale, a scapito della creatività personale e del riconoscimento di significati. Al più si riconosce un nesso tra matematica e applicazioni pratiche attinenti il mondo del lavoro. Una possibilità per contrastare quest'ottica purtroppo diffusa anche nella scuola è la riflessione che qui si propone su come la matematica abbia un'origine, uno sviluppo, una costruzione passo passo, come è stato ed è nel campo della ricerca e come, in scala ridotta, dovrebbe avvenire nella mente di ogni studente.

La matematica, in ciascuno dei campi in cui essa si sviluppa, si configura in modo formalizzato: gli oggetti sono astratti, individuati da definizioni rigorose, il linguaggio tende alla massima rigidità, l'operatività è regolata da leggi che vanno applicate con assoluto rigore. Appare dunque molto lontana dall'esperienza personale, piena di imprevisti, fantasia, creatività, e lontana dagli interessi degli allievi che devono apprenderla. Normalmente l'astrazione della matematica viene interpretata come astrattezza, cioè lontananza da ciò che accade e ci è vicino. Si salva al massimo il calcolo in virtù della sua utilità, inteso quindi come attività di servizio rispetto alle scienze applicative e alla tecnica.

Un apparente paradosso della cultura scientifica è però che più la matematica diventa astratta, più è utile per rappresentare fenomeni complessi della natura, come emerge molto bene dal brano di Alfred Whitehead riportato nel riquadro [5].

*Lavoro svolto nell'ambito delle attività dell'Unità locale di Ricerca in Didattica della Matematica, Università di Parma.

«Nei secoli sedicesimo e diciassettesimo la teoria della periodicità assume nella scienza un posto fondamentale; Keplero scoprì una legge che correla gli assi maggiori delle orbite planetarie con i periodi in cui i singoli pianeti percorrono le rispettive orbite; Galileo osservò le oscillazioni periodiche dei pendoli; Newton spiegò il suono come dovuto alle perturbazioni dell'aria per il passaggio di onde periodiche di condensazione e rarefazione; Huygens spiegò la luce in termini di onde trasversali di vibrazione di un etere sottile; Mersenne stabilì la relazione tra il periodo delle vibrazioni di una corda di violino e lo spessore, la tensione e la lunghezza della corda stessa. La nascita della fisica moderna è frutto dell'applicazione del concetto astratto di periodicità a una grande varietà di casi concreti. Ma questo sarebbe stato impossibile se i matematici non avessero prima elaborato, in astratto, le diverse idee che si concentrano attorno al concetto di periodicità. La trigonometria ha avuto origine dallo studio delle relazioni tra gli angoli del triangolo rettangolo e i rapporti fra i cateti e l'ipotenusa del triangolo. Poi sotto l'influsso della nuova matematica dell'analisi delle funzioni, si è estesa allo studio delle funzioni periodiche astratte semplici che configurano ed esprimono tali rapporti in generale. In questo modo la trigonometria è diventata completamente astratta e, diventando astratta, è diventata utile. Essa ha illuminato l'analogia di base tra gruppi di fenomeni fisici completamente diversi; e al tempo stesso, ha fornito gli strumenti con cui le diverse particolarità di un gruppo potevano essere analizzate e messe in rapporto tra loro. Non c'è nulla che colpisca più di questo fatto: via via che la matematica si elevava e appartava nelle regioni più alte del pensiero astratto tornava poi a terra come uno strumento sempre più importante per l'analisi dei fatti concreti. Il paradosso che le astrazioni estreme sono gli strumenti migliori per controllare la nostra idea dei fatti concreti ha acquisito una solida base.»

Ma cosa è in realtà la matematica?

Basta uno sguardo ai suoi processi creativi, storici e personali, per comprendere che sotto la superficie della matematica c'è molto di più del suo aspetto cristallizzato. Ecco l'inizio di un testo classico sulla natura della matematica [7].

«Come espressione della mente umana, la matematica riflette la volontà attiva, la ragione contemplativa e il desiderio di perfezione estetica. I suoi elementi fondamentali sono la logica e l'intuizione, l'analisi e la costruzione, la generalità e l'individualità. Tradizioni diverse potranno mettere in evidenza aspetti diversi, ma è soltanto la reazione di queste forze antitetiche e la lotta per la loro sintesi che costituiscono la vita, l'utilità e il valore supremo della scienza matematica. […] Se la forma deduttiva cristallizzata è la meta, l'intuizione e la costruzione sono per lo meno le forze conduttrici».

È interessante poi la posizione di Gabriele Lolli che, ritenendo insoddisfacenti tutte le spiegazioni che i filosofi hanno dato e danno della matematica, così valorizza l'esperienza duttile e creativa del fare matematica [2].

«Alle analisi fondazionali filosofiche bisogna sostituire un progetto molto più interessante, quello di capire la matematica. Invece di fondare bisogna capire. Tutte le posizioni di filosofia della matematica prendono in esame la matematica codificata nelle teorie assiomatizzate, o in una sola teoria onnicomprensiva, quindi l'insieme delle dimostrazioni conchiuse e statiche e non il complesso dell'esperienza matematica. [...] Siccome nelle lezioni universitarie non se ne parla, gli studenti che diventano insegnanti non sanno a quale impianto generale riferirsi, e si basano su quello che a loro sembra implicito nella matematica che hanno visto esporre. Due filosofie implicite prevalgono nell'insegnamento, incomunicanti e perciò deleterie: quella calcolistica algebrica e quella dimostrativa geometrica […] Nel frattempo un malinteso senso di rigore ha fatto sì che fossero escluse intuizione ed esperienza, che all'università hanno poco spazio, perché bisogna fare in fretta, non c'è il tempo né la disponibilità per coltivarle; ne risulta una mutilazione della matematica, prima che un mancato rispetto delle ovvie esigenze evolutive».

E la matematica a scuola?

Ponendoci in quest'ottica autorevole, deduciamo che imparare la matematica potrebbe essere non solo conoscerla nel suo aspetto finale (indispensabile!), ma anche nel suo farsi, identificandone la natura di pensiero che nasce, cresce, si evolve. Questo in effetti avviene, quando si svolgono attività che mediante l'esercizio delle stesse doti caratteristiche dei matematici (creatività, intuizione, osservazione, analisi, sintesi) permettono di ricostruirla partendo dall'inizio, che è per ognuno, come nella storia, la realtà, l'esperienza o le conoscenze precedenti.
Ma come fare, quale strada percorrere in classe? Non è facile rispondere o decidere di abbandonare una vecchia strada didattica, magari non attraente per gli allievi, ma sicura per l'insegnante. Occorrono

esempi rassicuranti. Fortunatamente, esistono risultati della ricerca didattica che permettono di lavorare in questa direzione.
Il primo passo è iniziare a distinguere l'aspetto ufficiale, istituzionale, della disciplina dalla lunga storia sia del suo sviluppo culturale, sia dell'apprendimento personale di ciascuno. La struttura finale, socialmente condivisa, punto d'arrivo della ricerca, deve restare anche il punto di arrivo di chi apprende: alle ricerche che sono servite per costruirla, corrispondono nell'apprendimento le attività che occorrono all'allievo per ricostruirla.
Ogni singolo allievo, quando studia matematica a scuola, si inserisce idealmente nel cammino della ricerca, può ripercorrerlo per quel poco o tanto che gli riesce di fare, modificando la sua mente e la sua persona. Qualsiasi sia il suo livello di comprensione, egli non scopre cose nuove per l'umanità (come fa la ricerca), ma solo nuove per sé, secondo un processo assai frequente in molti campi di esperienza.
Immaginiamo infatti una sinfonia, un'opera letteraria, un quadro di eccezionale bellezza, una ricetta elaborata, un vino pregiato, o un prodotto tecnologico sofisticato: la situazione non cambia! In ogni caso c'è una lunga storia di ricerca e di lavoro che produce l'oggetto attuale come noi lo vediamo, nel suo stato più avanzato di perfezione. Storia spesso collettiva che raccoglie contributi di molte persone, talvolta sconosciute l'una all'altra, ma storia sempre iniziata da fatti, osservazioni, esigenze legate all'esperienza, che possono non essere riconoscibili e riconosciuti nel momento in cui qualcuno si pone di fronte all'oggetto ultimo.
A lato c'è la storia di quanti debbono inserirsi nel processo, per apprenderne i rudimenti, o per arrivare a un grado più alto di apprendimento, oppure per inserirsi nel flusso del processo creativo. Qualcuno dei nostri allievi si inserirà stabilmente nel processo della ricerca in matematica, altri la utilizzeranno nel lavoro, altri ne avranno solo i frutti che impararla avrà portato alla loro persona.
Per comprendere meglio come percorrere questa strada, esaminiamo alcuni risultati basilari della ricerca in didattica della matematica, che ne fondano il rapporto con la realtà e con l'esperienza, cercando di chiarire il ruolo e i campi dell'esperienza rispetto all'apprendimento di questa disciplina.

Teorema in atto

Nella didattica si parla spesso di contestualizzazione e decontestualizzazione del sapere matematico. Facciamo riferimento alla ricerca dello psicologo francese Gerard Vergnaud, allievo di Piaget. «Teorema in atto» è il nome sintetico, da lui coniato, per indicare un'idea matematica (definizione, proprietà, teorema in senso proprio), quando essa è presente come elemento organizzatore di una situazione. Questa può essere un'operazione concreta, un gioco, un problema, una serie di esercizi, attraverso i quali l'idea matematica è incontrata dagli allievi e trattenuta in modo implicito, pur senza essere conosciuta nel suo aspetto formale. Possiamo parlare di «teorema in atto» solo finché l'idea in questione non viene riconosciuta esplicitamente, attraverso il lavoro scolastico, e formulata con il linguaggio proprio della matematica. A questo punto diventerà una conoscenza matematica vera e propria, non più implicita ma esplicita.

Quando è possibile apprendere una nozione incontrandola in situazioni e problemi, afferrandola prima in modo implicito ed elaborandola successivamente fino alla forma esplicita, utilizzando anche il linguaggio proprio, questo percorso appare come una via regia per l'apprendimento, poiché è in grado di produrre schemi mentali [6], che si trasformano facilmente in conoscenze stabili e significative. In questo caso, infatti, la conoscenza matematica affonda le radici nell'esperienza personale del soggetto, e la strada è quella auspicata concordemente per l'apprendimento dalla scienza cognitiva. La domanda essenziale è, ovviamente, se sia davvero e sempre possibile che una conoscenza matematica si presenti «in atto» e sia possibile acquisirla in modo implicito, o se il nome coniato dallo psicologo francese resti senza conseguenze pratiche. Per comprendere meglio il significato dell'osservazione che l'autore suggerisce, esaminiamo alcuni esempi di «teorema in atto» da lui stesso presentati [4]. Attraverso di essi, cercheremo di focalizzare cosa l'autore intenda sintetizzare con questo nome e la portata che tale idea potrebbe avere nell'insegnamento della matematica.

Esempio 1

Nel comune procedimento del contare gli elementi di un insieme sono contenute idee matematiche implicite profonde, e cioè quelle di relazione d'ordine, di corrispondenza biunivoca e di cardinalità. Vergnaud illustra come l'esistenza (o viceversa la mancanza) del concetto implicito di cardinalità si possa inferire dal comportamento dei bambini, osservando se la possiedono come conoscenza implicita. Notiamo che la possibilità di osservazione delle idee possedute implicitamente da un allievo è molto importante per un insegnante al fine della progettazione didattica.

«Quando conta un insieme di sei elementi, la maggior parte dei bambini di cinque o sei anni conta: uno, due, tre, quattro, cinque, sei…sei! Non solo essi devono stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli oggetti da contare, i gesti delle dita, i movimenti degli occhi e le parole-numero, ma sentono anche la necessità di dire la parola "sei" due volte. La prima si riferisce al sesto elemento dell'insieme, la seconda si riferisce al cardinale dell'insieme: questa doppia espressione significa che il concetto di cardinale è stato ben riconosciuto. I bambini più grandi non ripetono "sei", ma lo pronunciano solo con più enfasi rispetto agli altri numeri. Ma ci sono bambini che non ripetono "sei"e quando gli si chiede quanti oggetti ci sono, non sono capaci di rispondere e cominciano di nuovo a contare. Per i bambini che sanno cardinalizzare, "sei" riassume le informazioni sull'insieme sottoposto alla procedura del contare. Non è così per i bambini che non sanno cardinalizzare. Quindi si può inferire l'esistenza o la non esistenza del concetto di cardinale dal comportamento dei bambini». L'attività di osservazione che deve svolgere l'insegnante non è affatto banale: il comportamento dei bambini è ricco di informazioni soprattutto per gli insegnanti che non si aspettano dai bambini spiegazioni a parole, ma, essendo sicuri che ogni gesto ha un motivo, fanno ipotesi esplicative che poi verificano con ulteriori atti di osservazione. La domanda di chiarimento rivolta a parole dall'insegnante potrebbe restare senza risposta, perché un bambino non è sempre in grado di giustificare a parole un proprio comportamento intuitivo.

Esempio 2
«È ora ben noto che se devono contare un insieme di bambini, dopo aver già contato separatamente quattro maschi e tre femmine, molti bambini di cinque o sei anni contano di nuovo l'intero insieme. È un grande progresso essere capaci di dire 4+3 = 7 o anche di partire da 4 e poi contare 3 passi avanti. Questo abbrevia la procedura del contare tutto l'insieme. Questa scoperta (è proprio una scoperta per gli studenti, perché normalmente nessun maestro la insegna ai bambini) può essere considerata come il riconoscimento spontaneo dell'assioma fondamentale della teoria della misura:

$$\text{card}\,(A\cup B) = \text{card}\,A + \text{card}\,B$$

purché A e B abbiano intersezione vuota. Non si conta di nuovo tutto l'insieme; basta sommare i cardinali dei due sottoinsiemi».
Questa stessa proprietà viene utilizzata in modo implicito ogni volta che si esegue correttamente un problema in cui si debbono sommare due misure dello stesso tipo, due prezzi, due aree, o altro.

Esempio 3
Interessante è un altro esempio, che riguarda la linearità di una funzione, perché questa è una nozione che emerge formalmente molto tardi nel programma scolastico.
«In un problema orale alcuni studenti dovevano calcolare la quantità di zucchero necessaria per 50 bambini che andavano in colonia per 28 giorni. Si sapeva che la quantità occorrente per 10 bambini, per una settimana, era di 3,5 kg. Alcuni studenti dissero che 50 bambini è 5 volte più di 10 e 28 giorni è 4 volte più lungo di una settimana; perciò il consumo di zucchero doveva essere 20 volte più grande. Il non banale teorema in atto rilevato in questa procedura può essere scritto:

$$\text{Consumo}\,(5\bullet 10,\ 4\bullet 7) = 5\bullet 4\bullet\ \text{Consumo}\,(10,\ 7)$$

che è un caso particolare della funzione bilineare:

$$f(t_1\, x_1\,,\ t_2\, x_2) = t_1\bullet\ t_2\ \bullet f(x_1, x_2)$$

Naturalmente i facili valori numerici rendono possibile a ragazzi di 11 anni estrarre i rapporti 5 e 4; e non c'è per loro alcuna difficoltà concettuale nel riconoscere la doppia proporzionalità del consumo rispetto al numero di persone ed alla durata del tempo. Perciò c'è un grosso divario tra il teorema in atto da essi usato ed il teorema generale. Ma, di nuovo, l'idea matematica è presente».

Ho visto più volte in compiti di analisi attribuire la linearità a funzioni elementari come il logaritmo e le funzioni trigonometriche. Per difendersi da questi errori basta avere un'idea intuitiva di linearità, accompagnata dall'osservazione che solo alcune particolari funzioni la verificano. Uno studio dei polinomi omogenei può essere molto significativo, se l'insegnante sa guidare gli allievi a osservazioni di questo tipo, frenando però il suo desiderio di esplicitare in ogni caso tutte le nozioni che si incontrano.

Conseguenze teoriche

La prima è che l'idea sopra esposta suggerisce che per apprendere la matematica potrebbe essere molto utile partire da esperienze significative, utilizzando situazioni e problemi che come primo passo facciano nascere idee matematiche implicite e diano loro struttura stabile nella mente. Nei problemi un concetto non si trova mai isolato, dunque non viene affrontato da solo, ma insieme ad altri che più naturalmente sono a esso collegati. Per esempio in un problema che riguarda il concetto di addizione compariranno facilmente anche le proprietà associativa e commutativa della somma, nonché la necessità di usare una strategia di calcolo. Vergnaud raggruppa perciò in un «campo concettuale» le situazioni e i problemi che riguardano un gruppo di concetti tra loro collegati, che saranno affrontati insieme in

modo naturale. Per esempio addizione e sottrazione, insieme alle loro proprietà, formano un unico campo concettuale, mentre moltiplicazione e divisione formano un altro campo concettuale, al quale si può ritenere che appartenga anche la frazione. In conclusione, situazioni e problemi non riguardano mai una sola nozione, ma un intero campo concettuale o più suoi elementi. L'autore ha classificato i problemi che riguardano la struttura additiva e quella moltiplicativa. [3]
La seconda conseguenza è che ogni apprendimento matematico significativo è a lunga scadenza. Questo fatto, che un insegnante attento osserva nella realtà scolastica, non deve destare meraviglia, essendo giustificato dal fatto che il passaggio dalla prima idea implicita all'esplicitazione, comprendente anche l'acquisizione del linguaggio, segue i tempi del soggetto che apprende. L'insegnante può accelerarli attraverso la proposta di esperienze significative, attraverso l'uso di rappresentazioni, discussioni e altro, ma sempre entro i limiti della natura del processo. Forzarlo può avere la conseguenza di bloccarlo. La terza conseguenza è che un concetto matematico, dal punto di vista genetico, cioè dal punto di vista del soggetto che apprende, non si identifica con la sua espressione formale, ma è costituto da una terna di insiemi: l'insieme delle situazioni che rendono il concetto significativo in una varietà di aspetti; l'insieme degli invarianti operazionali e relazionali (proprietà, relazioni, teoremi in atto, che sono progressivamente afferrati dagli studenti); l'insieme dei simboli linguistici e non linguistici che rappresentano quegli invarianti e che sono usati per indicarli, per comunicare e discutere su di essi.

Applicazioni didattiche

Se e quando è possibile che gli allievi incontrino «in atto» i concetti matematici, cioè presenti in situazioni di vario tipo, in cui sono contenuti con la funzione di idee che organizzano e strutturano la situazione stessa, il modo più efficace di insegnare è proporre una molteplicità di situazioni, scelte appunto in quanto significative per formare una certa conoscenza implicita e poi, successivamente, curarne l'esplicitazione mediante tutti i possibili strumenti didattici: la parola, il disegno, la discussione, ed eventualmente (perché no?) la spiegazione. Ne nasce la funzione privilegiata del problema come strumento di concettualizzazione e di introduzione di nozioni nuove, intendendo per problema soprattutto una situazione o un testo che contenga qualche domanda non banale. Non è da escludere che il contenuto del problema possa essere anche una domanda mirata all'aspetto formale del settore della matematica in cui si sta operando.
Ma riconoscere la possibilità di conoscenze matematiche «in atto» non assicura a priori che tutta la matematica si possa insegnare e imparare

attraverso situazioni. Tale riconoscimento impegna piuttosto l'insegnante a ricercare situazioni (esterne o interne alla matematica) in cui ciascuna delle idee che vuole mettere a tema venga sperimentata come principio organizzatore e possa generare uno schema identificabile e riproducibile dal soggetto che apprende. Nulla garantisce a priori che questa modalità possa sempre realizzarsi e che non si presenti eventualmente qualche argomento su cui essa sia impossibile, o sembri esserlo.
Questa modalità non è ancora da considerarsi vincolante per ogni apprendimento, a qualsiasi livello di età o di maturità matematica. Anzi, nulla vieta di ipotizzare che quando l'allievo giunge a un buon grado di conoscenza della matematica, possa poi procedere velocemente studiandola su un testo senza fare esperienze generative.

Il concetto di schema

Vergnaud indica un modello di ciò che accade nella mente di chi apprende. La possibilità di costruire conoscenza matematica implicita porta a considerare necessaria l'attività personale di ogni singolo allievo. Ma come si produce il processo di apprendimento? Quale posto ha la mediazione didattica? L'autore integra la teoria dell'attività e la teoria della mediazione didattica mediante il concetto di schema. Egli approfondisce questo concetto concludendo la sua opera divulgativa su Vigotskij [6], da cui riprendiamo le due definizioni che egli propone.

Prima definizione
Uno schema è una forma invariante di organizzazione dell'attività e della condotta associata a una classe di situazioni. Pertanto è un universale, anche se la classe di situazioni è piccola. Dunque essa non riguarda solo l'apprendimento della matematica, ma è molto generale.
Ecco un esempio: il salto in alto praticato ai nostri giorni nello sport di alto livello, il quale, pur essendo differente da quello praticato mezzo secolo fa, è certamente personale, poiché un campione non ci sa fare alla stessa stregua di un altro. Inoltre, lo stesso campione non potrebbe produrre esattamente la stessa sequenza di gesti da un salto all'altro. Dunque pur non essendo invariante la condotta, lo è la sua organizzazione.

Passiamo ora, seguendo l'autore, a un esempio matematico, la risoluzione dei problemi del quarto proporzionale, considerando un particolare testo: «Il prezzo di 2 chilogrammi di pesche è di 15 franchi. Quanto costano 7 chilogrammi?»
Le tre forme più comuni di ragionamento e di calcolo utilizzate per questa categoria di problemi sono le seguenti:
il prodotto in croce e la regola del tre: $15 \cdot 7 = x \cdot 2 \qquad x = 15 \cdot 7 /2$;
il calcolo del prezzo di un chilogrammo: $15 : 2 = 7{,}5$;
poi la moltiplicazione per il numero di chilogrammi: $7{,}5 \times 7$;
il ragionamento per isomorfismo di due grandezze proporzionali: il prezzo di 7 chilogrammi sta a 15 franchi, come 7 chilogrammi sta a 2 chilogrammi. Sette chilogrammi è 3,5 volte 2 chilogrammi, cioè 2

chilogrammi più 2 chilogrammi più 2 chilogrammi più la metà di 2 chilogrammi; il prezzo è dunque 15 franchi più 15 franchi più 15 franchi più 7,50 franchi.
Il prodotto in croce viene insegnato in tutto il mondo, anzi a volte è l'unico procedimento insegnato, ed è quindi una forma tipica della cultura matematica. Tuttavia gli alunni preferiscono spesso gli altri procedimenti, in particolare l'ultimo. Questo dimostra che le forme di organizzazione dell'attività non sono puramente determinate dagli usi sociali, ma poggiano anche sul modo in cui gli allievi si appropriano delle diverse relazioni in gioco.
Uno schema può essere una procedura organizzata in modo molto stringato, come nel caso del prodotto in croce, ma può anche raggruppare una varietà di procedure o di sotto-schemi alternativi, come avviene nel caso del ragionamento sulla proporzionalità. In ogni caso l'allievo deve disporre di un quadro concettuale che gli permette di scegliere le conoscenze che soggiacciono all'attività: concetto-in-atto e teorema-in-atto.

Seconda definizione
Uno schema comporta necessariamente quattro tipi di componenti: uno o più scopi, che si declinano in sotto-scopi e anticipazioni; regole di azione, di presa d'informazione e di controllo; invarianti operatori: concetti in atto e teoremi in atto; possibilità d'inferenza.
Queste quattro componenti permettono di spiegare l'«intenzionalità» (scopi e sotto-scopi), «il carattere generativo» (le regole man mano generano l'attività), «la conoscenza del reale» (gli invarianti operatori), «l'adattabilità alla varietà dei casi rappresentati e il calcolo in situazione» (le possibilità di inferenza). Danno quindi una buona comprensione delle proprietà degli schemi.

La mediazione didattica

Dopo queste puntualizzazioni, Vergnaud torna sulla teoria della mediazione di Vygotskij, per precisarla meglio, ed espone questa sintesi, nella quale la posizione dell'insegnante è decisamente attiva, pur lasciando all'allievo lo spazio per la costruzione personale [6].

«Il primo atto di mediazione dell'insegnante è la scelta della situazione da proporre agli alunni. Ma questo atto è seguito da parecchi altri atti di mediazione: chiarificazione degli scopi e sotto-scopi se l'allievo non afferra immediatamente il senso della situazione o di una fase dell'attività necessaria; presa in carico da parte dell'insegnante di una parte delle azioni che l'alunno non riuscirebbe ad effettuare da solo; aiuto nell'estrarre informazioni pertinenti e nell'eventuale esplicitazione; aiuto alle inferenze. In quest'attività di mediazione, il linguaggio ha una parte importante. Ma sarebbe un errore pensare che sia l'unica necessità e che sia del tutto decisivo. Una buona parte dell'attività di mediazione dell'insegnante passa attraverso la gestualità, lo sguardo, la manifestazione corporea dei sentimenti e delle emozioni. Per comprendere la competenza professionale degli insegnanti, bisogna dunque interessarsi a tutti i registri d'espressione degli atti di mediazione.»

La reinvenzione guidata

Mentre Vergnaud giunge a delineare la funzione dell'insegnante nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica parten-

do dal suo punto di vista di psicologo, Hans Freudenthal mette il processo in relazione con la natura della matematica. In primo luogo, questa è, secondo lui, una dottrina che ricerca la certezza [8], in secondo luogo egli la considera essenzialmente un'attività, più che un prodotto. Ne deduce che se la matematica è un'attività [8], il suo insegnamento non può essere insaccamento di nozioni e addestramento meccanico, atteggiamento che sarebbe tra l'altro, oltre che inadatto all'essenza della matematica, anche segno di poca stima per l'umanità degli allievi e scarsa preoccupazione per la crescita della loro personalità.
Egli ha rielaborato in un testo [8] le sue convinzioni sulla natura dell'insegnamento-apprendimento della matematica, frutto della sua alta competenza di matematico e di una lunga ricerca didattica svolta sul campo, testimoniata da duecento pubblicazioni sull'argomento, i cui titoli sono elencati in appendice al testo. Ecco come l'autore introduce il processo che chiama «reinvenzione guidata», avendo presente la ricchezza della struttura interna della matematica e precisando che nessuno dei suoi aspetti particolari sfugge alla possibilità della reinvenzione guidata [8].

> «*Problem solving* e imparare per scoperta sono ormai diventate delle espressioni accattivanti. Non mi sono mai piaciute quando erano pronunciate come slogans, e mi piacciono ancora meno da quando ne ho visto degli esempi la prima volta. Problem solving, cioè risolvere il problema proposto dall'insegnante o dall'autore del libro di testo o dal ricercatore di didattica, col metodo che costoro hanno in testa, piuttosto che con la procedura del discente, che affronta qualche cosa come un problema. Imparare per scoperta, cioè scoprire ciò che qualcun altro ha nascosto, come si fa con le uova di Pasqua [...] Con riferimento ai contenuti da organizzare, io preferirei il termine «scoperta»; tuttavia, nel contesto dell'insegnamento, ho scelto da molto tempo il termine «invenzione», che abbraccia contemporaneamente forma e contenuto, scoperta di cose nuove e invenzione. Le invenzioni, come vengono presentate qui, sono dei passi nel processo di apprendimento, e sono indicate qui da quel re che entra nella parola reinvenzione; e l'ambiente dell'istruzione nel processo di apprendimento è indicato dal termine guidata […] Per spiegare come la matematica dovrebbe essere imparata, ho scelto da tempo l'espressione reinvenzione guidata […] Tradizionalmente la matematica viene insegnata come qualcosa di bell'e fatto. Agli studenti si danno le definizioni, le leggi, gli algoritmi secondo i quali ci si aspetta che si comportino. Soltanto una infima minoranza impara la matematica in questo modo […] Guidare la reinvenzione significa trovare un delicato equilibrio tra la libertà dell'inventare e la forza del guidare, tra il permettere all'allievo di divertirsi e il chiedergli di compiacere al docente. Inoltre la libertà di scelta di chi apprende è sempre limitata dal re di reinvenzione. L'allievo deve inventare qualcosa che per lui è nuovo, ma che è ben conosciuto da chi guida.Quale che sia l'importanza dei contenuti e delle abilità, essa è molto minore nella matematica che nelle altre materie. Poiché ho presentato insistentemente la matematica come un'attività, la risposta alla domanda: "Qual è la meta?" sarà: "Un'attività". In altre parole, l'allievo deve reinventare il fare matematica piuttosto che la matematica; l'azione di astrarre piuttosto che le astrazioni, il formalizzare piuttosto che costruire delle formule; il costruire algoritmi piuttosto che gli algoritmi; il parlare piuttosto che il linguaggio, eccetera.»

L'applicazione di un metodo di questo tipo deve restare fortemente condizionata dall'allievo, dalle sue intuizioni, dai suoi tentativi, dal suo modo personale di agire, dal tempo che gli occorre per produrre un salto cognitivo. L'insegnante non può ignorare tali condizioni ed essere impersonale, anzi potremmo dire che scegliere la reinvenzione come metodo didattico è possibile solo se allievo e docente si pongono in relazione. Dunque a ragione, per comunicare questo metodo agli insegnanti, Freudenthal non indica un elenco di passi precostituiti, ma racconta casi, sue personali esperienze didattiche, ponendo in evidenza come alcune volte dopo un certo tempo di lavoro abbia suggerito una risposta, mentre altre volte abbia messo l'allievo in una situazione più stringente per spingerlo ad arrivare da solo. Portando l'esempio di una ragazzina di dodici anni alle prese con l'aritmetica, dice: «Il mio principio era di metterla in situazioni visive concrete (se possibile) e lasciarla lavorare in modo intuitivo. Non le ho mai spiegato niente, né ho formulato alcuna legge, né le ho chiesto di formulare leggi. Quando ho avuto l'impressione che lavorasse ancora in modo intuitivo, mentre era arrivata alla formulazione algoritmica di un problema, ho ingrandito esageratamente i dati numerici del problema, in modo che il ruolo dell'algoritmo diventasse evidente. Ho domandato "perché" solo quando ero sicuro che conosceva la risposta.» [8]

L'autore non vuol dire che tolga a se stesso il diritto di intervenire, ma indica un equilibrio che il docente dovrebbe cercare di raggiungere: «le situazioni nelle quali era posta si spiegavano da sole; e se aggiungevo qualcosa era per fare come quando si attira l'attenzione su un particolare di un quadro.» [8]

Seguendo lo svolgersi del pensiero di Freudenthal, abbiamo fatto indubbiamente un passo avanti: non ci si riferisce più solo ai concetti, ma anche agli algoritmi, al linguaggio, alla formalizzazione; non ci si riferisce solo a esperienze su cose e fatti esterni a sé, ma si comincia a intuire che si può fare esperienza del proprio fare matematica, percorrendo in questo fare un cammino evolutivo. Freudenthal indica chiaramente l'importanza degli algoritmi: «Il dominio della manovra degli algoritmi è un momento cruciale per il progresso dell'individuo, come lo è stato per il progresso dell'umanità. Gli algoritmi ci permettono di lavorare automaticamente per un lungo tempo, evitando di arrestarci ad ogni passo per rimeditare. Ma gli algoritmi sono esigenti: per possederli occorre possederli bene; se si posseggono per un livello inferiore al 100%, ciò può significare che tutto va storto. Naturalmente nessuno è infallibile, neppure i computer. Il possesso significa sapere identificare e correggere i propri errori, errori casuali come errori materiali di calcolo, e gli errori fondamentali, come quello che si commette usando un algoritmo laddove non è richiesto. Possesso inoltre significa che esso può venire riacquistato qualora si perdesse.» [8]

Freudenthal critica i sistemi tradizionali di insegnamento: secondo lui un algoritmo non si impara perché viene offerto all'alunno un paradigma che prima si impara e poi si capisce: solo alcuni particolarmente dotati possono imparare così! In genere, anche se un algoritmo è prima spiegato, non è imparato meglio che se non venisse affatto spiegato. Allora non c'è rimedio? Freudenthal sembra pensare che in effetti il rimedio non ci sia nella didattica intesa come spiegazione e imitazione, ma può esserci solo in un'altra strada: «Il costruire algoritmi significa che l'analisi e la discussione critica sono lasciate al discente, anche se per qualche tempo rimangono implicite nel processo cognitivo […] Reinventare gli algoritmi coinvolge una progressione di schematizzazioni, che viene accorciata via via da colui che reinventa, al quale viene permesso di accostarsi all'algoritmo standard nella misura in cui viene concesso dalle necessità e dalle abilità di apprendimento.» [8]

Esempi di tecniche inventate da allievi mentre elaborano gli algoritmi delle operazioni.
Questo che segue è l'ultimo passaggio di schematizzazione prima della consueta addizione in colonna:

4	3	8		4	3	8		4	3	8
3	9	7	+	3	9	7	+	3	9	7
7	12	15		7	12	15		7	13	5
7	13	5		8	3	5		8	3	5
8	3	5								

Nella prima addizione, il primo passaggio (terza riga) è sommare separatamente le unità, le decine, le centinaia, senza preoccuparsi del riporto; nella quarta riga, tenendo conto della scrittura posizionale, si inizia ad eseguire il riporto e le 15 unità sono suddivise: 5 restano unità, 10 vengono associate alle decine incrementandone di 1 il numero, che passa da 12 a 13. Nella riga successiva, per lo stesso motivo, le 13 decine vengono suddivise: 3 restano decine e 10 decine diventano un centinaio, facendo passare da 7 a 8 il numero delle centinaia; si ha così il risultato. Nella seconda e nella terza addizione i passaggi vengono via via sveltiti (scopo dell'algoritmo!).
Nella reinvenzione della sottrazione in colonna compare un personaggio che l'autore chiama «eterodosso»:

$$\begin{array}{r} 43 \\ -19 \\ 3\underline{6} \\ =24 \end{array}$$

e cioè il 6 sottolineato: esso indica in effetti un numero negativo: $3 - 9 = -6$. Ma il pensiero del bambino è un altro: siccome 3–9 non si può fare, egli fa 9–3 e lo memorizza sottolineando il 6, poi sa che deve fare 30–6 e trova il risultato 24. Il testo di Freudenthal riporta successivamente reinvenzioni laboriose ed interessanti della moltiplicazione e divisione, alcune delle quali sono diventate processi noti nella attuale pratica didattica.
Un esempio sull'algebra.
«Vorrei dare un esempio tipico di algoritmizzazione. Fino ad un certo giorno, la ragazzina di cui parlo aveva l'abitudine di risolvere le equazioni come $2/3\ x = a$ prima moltiplicando per 3 e poi dividendo per 2. Quel giorno accadde che lei tirò direttamente la conclusione da $5/3\ x = a$ ad $x = 3/5\ a$ e questa diventò una regola tacitamente applicata. Non sono mai intervenuto per suggerire delle abbreviazioni di calcolo come questa; per la verità lei le aveva scoperte molto prima, ma non osava applicarle perché non era sicura della mia approvazione; e difatti, quando faceva una abbreviazione di calcolo, mi guardava poi quasi per chiedere il mio permesso.»

Conclusione

Quanti modi esistono, dunque, di intendere e praticare l'esperienza nell'insegnamento-apprendimento della matematica?
Gli autori a cui mi sono riferita hanno esplicitato un aspetto molto particolare del processo di apprendimento della matematica, collegato con aspetti costitutivi di questo sapere, sia in senso personale che storico. L'aspetto da loro evidenziato non esclude assolutamente l'utilità degli apporti di altri campi di ricerca della didattica della matematica, che esulano però da questa sede. In sintesi, Vergnaud e Freudenthal mostrano l'efficacia della partecipazione del soggetto alla costruzione del proprio sapere, attraverso azioni (sia pratiche che concettuali), selezionate dall'insegnante in quanto significative sia per lui che per lo scopo didattico a cui

sono subordinate. Il loro contributo è prezioso per il ripensamento sulla natura della matematica e del suo apprendimento, per le affermazioni teoriche che valorizzano l'azione dell'io, e soprattutto perché avviano gli insegnanti a porre in atto un insegnamento non meccanico indicando campi di esperienza significativi e possibili modalità di attuazione.

Esaminando alcuni processi scolastici molto comuni, ci si rende conto che l'esperienza non è espulsa a priori, ma è considerata e proposta in modo fortemente riduttivo. Essa assume aspetti diversi a seconda delle convinzioni dell'insegnante sulla disciplina, sul suo apprendimento e sull'educazione in senso lato.

Una vecchia abitudine degli insegnanti di matematica è quella di ignorare la teoria, identificando la pratica scolastica con lo svolgimento di innumerevoli esercizi. Essi sono rigidamente classificati per tipi, di cui l'insegnante dà un modello di risoluzione che l'allievo deve memorizzare applicandolo su tanti casi particolari. Si produce (volutamente) un condizionamento meccanico, si chiede un gioco di equilibrio più che una esplicitazione del proprio pensiero. In genere la giustificazione data dagli insegnanti è che la matematica è troppo difficile per gli allievi, oppure che la sua natura è proprio quella di essere una congerie di regole. C'entra spesso anche una manifestazione di ansia da parte degli insegnanti, che ritengono in questo modo di potere prevenire gli errori mediante l'assoluta prescrittività. Gli allievi però in questa pratica fanno un'esperienza molto povera di pensiero, usano numeri e formule perdendo la curiosità e l'abitudine a indagare sulla loro costruzione e sul loro senso, perciò è minimo l'autocontrollo che acquisiscono e quando sbagliano sono indifesi.

Per superare posizioni di questo tipo, penso che sia molto utile far venire alla luce le convinzioni e le posizioni intuitive che evoca in noi il termine «esperienza». Questo può facilitare nel liberare il campo da preconcetti per orientare in modo più consapevole le scelte di insegnanti. Partiamo dall'indagine lessicale per individuare nel nostro patrimonio linguistico diversi possibili significati del termine esperienza [1]: conoscenza pratica della vita o di una determinata sfera della realtà, acquisita con il tempo e l'esercizio; in questo senso è una caratteristica generale, come quando si dice «esperienza del mondo, degli uomini, negli affari, o persona di grande esperienza»; ogni singolo atto o avvenimento, occasionale o deliberatamente cercato, da cui è possibile acquisire una conoscenza diretta; in questo senso ci si riferisce a fatti specifici, come quando si dice «un'esperienza di lavoro, un'esperienza utile»; in senso filosofico, conoscenza che, muovendo dalla percezione sensibile, organizza i dati mediante la riflessione e la loro verifica sperimentale; qui c'è un ampliamento del primo significato mediante l'esplicitazione della riflessione e della verifica; nel linguaggio scientifico, esperimento; ad esempio: «condurre un'esperienza di idrodinamica»; si mette in evidenza la riproducibilità rispetto ai fatti che accadono spontaneamente.

Secondo il primo significato, si potrebbe dire in modo generico «avere esperienza della matematica», nel senso di averla praticata e questo sarebbe abbastanza banale nel nostro discorso. In accordo con il secondo, ci si potrebbe chiedere, per esempio, attraverso quali giochi ed esperienze concrete un bambino possa acquisire la conoscenza delle quattro operazioni tra numeri naturali. Se queste esperienze generano tale conoscenza, il bambino muove davvero dalla percezione sensibile e organizza i dati fino alla conoscenza, in accordo con il terzo significato. Se ci chiediamo invece se esiste qualche esperienza in campo matematico che permetta la conoscenza della definizione di limite, indichiamo in questo modo qualche particolare attività che, contestualizzando la definizione, renda più agevole l'organizzazione dei dati in essa contenuti (gli intorni e la loro subordinazione).
Se questo è possibile, non si tratta più di esperienza che parte dalla percezione sensibile (che si esercita nei confronti di esperienze su fatti materiali), quanto di problemi posti come situazioni nuove che permettono una osservazione dei dati e delle relazioni tra essi esistenti. Abbiamo dunque un significato simile a quello di «esperimento», legato in origine alle scienze sperimentali, che in qualche modo può essere introdotto anche nell'insegnamento della matematica.
Se si identifica l'apprendimento della matematica con una ricostruzione significativa del sapere da parte di chi apprende, l'esperienza proposta in classe deve essere ricca, nel senso che non sia preventivamente ordinata ad un solo particolare e che contenga molte domande, esplicite o implicite, a cui l'allievo sia messo in condizione di rispondere attraverso la sua sperimentazione, accompagnato dall'insegnante ed interagendo con i compagni. Ciò che rende attuabile questo processo è la situazione didattica predisposta: le proposte, il tempo disponibile, le modalità di lavoro (singolo, per gruppi, con materiale adeguato, con presentazione dei risultati e discussione, ecc), la padronanza dell'insegnante sul controllo dei propri interventi, le modalità di valutazione. Sono condizioni che assicurano di avere un tempo senza ansia per procedere per tentativi e per verificarli, e che indirizzano poi ad una lenta ed efficace memorizzazione conclusiva.
Un'altra condizione incide sulle caratteristiche dell'esperienza: l'età e la maturità matematica degli allievi. Ma conviene rimandare l'approfondimento di questo punto a esemplificazioni successive, relative sia alla scuola primaria che alla secondaria di primo e secondo grado. v

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

[1] AA.VV., *Grande dizionario della lingua italiana*, Garzanti, Milano 1987.
[2] Gabriele Lolli, *Capire la matematica*, Il Mulino, Bologna 1996.
[3] Gerard Vergnaud, *Il bambino, la matematica, la realtà*, Armando, Roma 1994.
[4] Gerard Vergnaud, *Schemi teorici e fatti empirici nella psicologia dell'educazione matematica* in E. Fischbein, G.Vergnaud, *Matematica a scuola: teoria ed esperienza*, Pitagora, Bologna 1992.
[5] Alfred Whitehead, *La scienza e il mondo moderno*, Boringhieri, Torino 1979.
[6] Gerard Vergnaud, *Lev Vygotski, pedagogue et penseur de notre temps*, Hachette, Paris 2000.
[7] Richard Courant Herbert Robbins, *Che cos'è la matematica*, Boringhieri, Torino 1950.
[8] Hans Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica*, La Scuola , Brescia 1994.