LA SCRITTURA POSIZIONALE DEI NUMERI

prevenire le difficoltà

di Anna Paola Longo

L'argomento potrebbe apparire banale agli insegnanti a causa della familiarità che gli adulti hanno sviluppato nei confronti della rappresentazione posizionale. Per i bambini è invece il primo impatto veramente duro con un sistema complesso di rappresentazione. Lo testimoniano gli errori, citati dall'autore, nella scrittura dei numeri o nella identificazione dell'ordine per i numeri decimali. Per evitare o recuperare errori di questo genere, e quelli che ne conseguono, occorre che siano afferrate con consapevolezza tutte le varie tappe della rappresentazione. Questo è anche un prerequisito importante per affrontare senza disagio l'apprendimento degli algoritmi delle quattro operazioni.

Una conoscenza fondamentale per l'apprendimento della matematica è la rappresentazione posizionale dei numeri. Essa non coincide con il numero, che prescinde dal modo di scriverlo, tanto che i bambini in prima elementare riescono a contare fino a cento e oltre basandosi solo sull'idea di numero e sulla comprensione linguistica delle parole-numero. Occorre quindi ricordare che «non bisogna confondere il numero con la sua rappresentazione scritta. Il numero nove può essere scritto in molti modi: 9 in cifre arabe, IX nella scrittura romana, 21 in base quattro, eccetera. Queste diverse scritture rappresentano assolutamente lo stesso numero con le stesse proprietà (cardinale degli insiemi a nove elementi, numero dispari, multiplo di tre, successivo di otto, eccetera). Il numero è un concetto di cui esistono più possibili sistemi di scrittura. La numerazione posizionale in base dieci è uno di questi sistemi» [Vergnaud, 1994].

Tuttavia per il bambino, nell'apprendimento, il sistema di scrittura dei numeri non è indipendente da essi: «Il sistema di numerazione è un supporto della concettualizzazione e sarebbe un'impresa parlare dei numeri grandi e dei numeri decimali senza l'aiuto della loro rappresentazione scritta» [Vergnaud, 1994].

Le difficoltà incontrate in aritmetica dai bambini dipendono, almeno in parte, da una inadeguata comprensione del sistema di numerazione, come negli errori di scrittura, per esempio 7000 500 invece di 7.500 [Longo,1997], nell'incolonnamento dei numeri, nel riconoscere l'ordine di numeri decimali, per esempio tra 37.29 e 37.4, quando i bambini si lasciano guidare dal

confronto tra 29 e 4 considerandoli numeri interi, senza riconoscere dalla posizione che si tratta di 29 centesimi e 4 decimi. Per superare gli ostacoli, occorre perciò distinguere con cura i vari piani di lavoro che entrano in funzione nell'acquisizione dei numeri e delle operazioni, riconoscendo (e separandole dalle altre) le difficoltà e gli errori derivanti dalla mancanza di acquisizione e riconoscimento del significato della scrittura posizionale.
Lo scopo del lavoro didattico non è introdurre decina, centinaio, eccetera, ma far comprendere che si mette in opera un meccanismo di raggruppamento che si può ripetere successivamente quante volte si vuole e un conseguente sistema di registrazione.

I raggruppamenti di ordine successivo

Riflettiamo sui passi necessari per giungere alla rappresentazione posizionale. Occorre avere chiara, e trasmetterla operando, una ragione adeguata al lavoro che ci si accinge a proporre.

Un nuovo modo di contare

Una buona motivazione per iniziare a raggruppare (e contare poi gli oggetti attraverso i raggruppamenti ottenuti) è porsi il problema di contare un insieme abbastanza numeroso di oggetti, in cui facilmente, procedendo uno a uno, si commettono errori dovuti alla difficoltà percettiva ed all'attenzione. Il conteggio è facilitato se si formano gruppi di oggetti e si conta servendosi dei gruppi. Ci si accorge poi che è più conveniente che i gruppi siano tutti uguali. Questo cambia la situazione dal punto di vista della percezione, poiché non ci si trova più di fronte a un grande numero di oggetti, ma a un numero molto più piccolo di gruppi.
Alla fine, fissato un numero naturale $n \geq 2$, che chiamiamo «base», si raggruppano gli oggetti in mucchi contenenti tutti lo stesso numero n di oggetti. Questi possono essere lasciati liberi solo se sono in numero minore di n. Per esempio, se si sceglie la base 5, si possono trovare liberi al massimo 4 oggetti; nel caso che se ne aggiunga un altro, scatta la legge del raggruppamento ed i 5 oggetti devono essere riuniti in un unico raggruppamento. Anche questi possono essere liberi solo se sono in numero minore di n. Quando arrivano ad essere n, vanno nuovamente raggruppati formando raggruppamenti del secondo ordine: 5 raggruppamenti da 5 elementi vanno raggruppati in un raggruppamento del secondo ordine, e così via.

La base dieci

La scrittura ordinaria dei numeri usa la base 10; i raggruppamenti successivi prendono il nome di decina, centinaio, migliaio. Tenendo conto di quanto sopra affermato, se si è scelto n = 10, non possono restare liberi 10 oggetti oppure 10 decine, e così via. Esercizi in altre basi possono essere utili per capire il meccanismo, ma lo scopo è quello di imparare a usare la base 10. Se un bambino ha compreso il meccanismo iterativo della formazione dei gruppi, non è una sorpresa, ma anzi un rafforzamento, arrivare in breve tempo al centinaio, dopo aver fatto 10 mucchi da 10, e proseguire rapidamente con gli ordini successivi.

Quanti tipi di oggetti?

Qualunque sia la base scelta, se raggruppiamo, passiamo da una grande quantità di oggetti dello stesso tipo a una quantità molto minore di oggetti di tipo diverso: ciascuno di essi ha una suo preciso valore (rispetto agli oggetti sciolti), che va riconosciuto per capire la quantità complessiva.
A questo punto sono possibili esercizi di vario tipo: (a) dati degli oggetti in un unico mucchio, suddividerli in raggruppamenti e denominare il numero corrispondente; (b) dato a voce un numero, formarlo con i raggruppamenti di oggetti; (c) dato un raggruppamento, individuare a voce il numero corrispondente.
In un primo tempo, se sono fisicamente presenti i raggruppamenti, la lettura del numero dipende esclusivamente dal tipo di oggetti presenti (liberi o raggruppamenti di vario ordine), indipendentemente dalla loro posizione.
Schematizziamo con un disegno un raggruppamento di oggetti su un tavolo.

Secondo le abitudini della lingua leggiamo: 1 centinaio, 2 decine, 3 oggetti sciolti (unità) e cioè il numero «centoventitre», indipendentemente dalla disposizione (qui il centinaio è stato posto tra le decine e le unità per indicare che siamo ancora al primo livello: raggruppare).
Non bisogna credere che i bambini non sappiano comprendere il senso della parola-numero «centoventitre» perché non hanno ancora imparato a usare la scrittura posizionale. Questo è forse il timore che rallenta il lavoro degli insegnanti che si fermano un tempo eccessivo sulla decina, con il rischio che i bambini si polarizzino sul nome senza cogliere il cuore della faccenda.
L'apprendimento verbale dei numeri e quello della loro scrittura sono completamente indipendenti tra loro, come ci confermano numerose esperienze. L'esposizione alla lingua è la prima forma di incontro con decina e centinaio, secondo la modalità della conoscenza implicita espressa dal «teorema in atto» [Longo, 2005]. Come tutte le conoscenze «in atto», se ne fa esperienza prima di averla conosciuta esplicitamente e si lavora poi per rendere i bambini consapevoli di quello che stanno già usando a voce.
Il materiale usato per imparare a raggruppare può essere di varia natura: materiale non strutturato come bastoncini, cannucce, stuzzicadenti, avvolti da cordicelle o elastici, magari di vario colore secondo gli ordini di raggruppamento; bottoni, pasta, con raggruppamenti ottenuti con sac-

chetti di plastica o scatole; crocette o pallini, disegnati su un foglio, cercando un modo grafico per indicare i vari raggruppamenti (ricordando però che l'uso di simboli non è il primo livello di lavoro); materiale strutturato come materiale multibase (unità, barre, piatti, cubi).

Avvertenze didattiche

È consigliabile usare materiali di tipo diverso, includendo anche oggetti legati all'esperienza quotidiana dei bambini.
Prima di passare ai disegni, i bambini devono esercitarsi abbastanza a lungo con esperienze attive di formazione di gruppi di oggetti. Per quanto tempo? Non c'è una risposta teorica, l'insegnante si lascia guidare dall'osservazione dei comportamenti degli alunni e, lasciando passare del tempo, riprende varie volte gli esercizi, anche come verifica. Nella prima fase è molto importante che i bambini superino la tendenza a eseguire il conteggio dei singoli oggetti sciogliendo il raggruppamento o guardando gli oggetti attraverso i sacchetti, come se gli oggetti fossero ancora separati. L'acquisizione a cui si mira è imparare a contare i vari mucchi ottenuti ed a servirsi a mente di questo conteggio per ricostruire il numero complessivo.
Questo passaggio può essere sollecitato utilizzando mucchi in cui non sia visibile il numero di oggetti contenuti, in modo che i bambini siano costretti a passare dal contare oggetti singoli al contare per gruppi.
Naturalmente, nell'illustrazione del procedimento posso servirmi subito di disegni per illustrare i raggruppamenti, ma nel lavoro reale con i bambini ci sarà prima la fase dell'azione di raggruppare e leggere la quantità di un raggruppamento effettivo di oggetti e poi, successivamente, la rappresentazione dei raggruppamenti mediante disegni ed infine la lettura della quantità da raggruppamenti disegnati.

L'ordine convenzionale e la scrittura posizionale

Dopo l'introduzione dei raggruppamenti, i passaggi concettuali seguenti mirano a rappresentare in forma scritta i numeri mediante le cifre da 1 a 9, dando ad esse valore diverso secondo la posizione nella scrittura. Il primo passo è introdurre un ordine privilegiato per la disposizione dei raggruppamenti, secondo la convenzione usuale, il secondo è registrare con le cifre. Vediamo come. Tutto è facile finché nella sequenza compaiono raggruppamenti di tutti gli ordini successivi. Supponiamo di avere 3 centinaia, 2 decine e 4 unità sciolte; cominciamo a rappresentare la quantità come abbiamo visto sopra, con materiale strutturato o non strutturato. Successivamente, se cerchiamo un modo di registrarla sulla lavagna o sul quaderno, siamo facilitati dall'introduzione di qualche simbolo. Si potrebbe introdurre

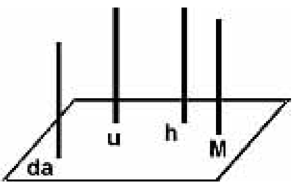
una scrittura abbreviata molto libera come: 4u, 2d, 3c, oppure, con altrettanta libertà, una notazione additiva che faccia uso dei simboli stabiliti:
3c + 2d + 4u, oppure 2d + 3c + 4u, oppure ancora 4u + 2d + 3c (u sta per unità libera, d per decina e c per centinaio). La posizione non è ancora decisiva e le tre scritture indicano la stessa quantità. Sono tutti passaggi liberi che rispondono allo scopo della registrazione e che possono essere utilizzate in situazioni diverse, per esempio di ripresa successiva o di recupero.
Se ci poniamo poi l'obiettivo di abbandonare le marche, possiamo passare, sia sugli oggetti che sulla rappresentazione, da una disposizione in ordine sparso a una disposizione ordinata, per esempio da sinistra a destra, in questo modo:

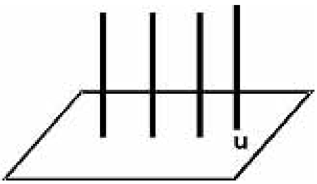
C C C D D I I I I

dove C è un centinaio, D una decina, e I una unità libera. Questa scelta permette di disporre per analogia sul foglio, in ordine successivo da sinistra a destra, le cifre che rappresentano le centinaia, le decine, le unità scrivendo semplicemente in ordine le tre cifre, di diverso valore, 324. In questo modo non abbiamo bisogno di indicare esplicitamente il valore di ciascuna cifra perché lo rileviamo dalla posizione. È interessante notare che, secondo la nostra abitudine, cominciamo a scrivere da sinistra e andiamo verso destra, tuttavia questa scrittura è concettualmente chiusa a destra ed aperta a sinistra. Se infatti nel numero scritto passiamo dalle centinaia alle migliaia, possiamo aggiungere solo a sinistra la cifra che le rappresenta. Per esempio, se aggiungiamo 5 migliaia al numero precedente, premettiamo 5 e scriviamo 5324, in cui è ancora vero che l'ultima cifra a destra rappresenta le unità libere e che poi spostandoci a sinistra abbiamo in sequenza decine, centinaia e migliaia.
I passaggi segnalati possono essere molto brevi, per esempio può essere saltata la registrazione di tipo additivo o in ordine qualsiasi introducendo subito la convenzione usuale. Mi sembra però che, soprattutto nel caso di un recupero, bisogna assicurarsi che tutti i passaggi (sotto-obiettivi che compongono l'unico obiettivo della scrittura posizionale) siano stati interiorizzati.

La registrazione con l'abaco

L'abaco è un materiale didattico strutturato molto astratto e complesso, che ha però il vantaggio di permettere di registrare secondo la posizione. È interessante costruirlo in classe con materiale povero, senza colorare le aste e i dischetti, in modo da poter ripercorrere con i bambini tutti i passaggi concettuali della rappresentazione. Infatti, nell'abaco in commercio, in cui si distingue con il colore il valore da attribuire ai dischetti, la funzione della posizione non viene messa in evidenza. Costruendo l'abaco, la prima registrazione può corrispondere alla disposizione casuale dei gruppi; si possono disporre in modo vario le aste e indicare unità, decine, centinaia, migliaia, eccetera, segnando con cartellini le marche accanto alle aste corrispondenti, come nell'immagine a lato.





Un secondo passaggio può corrispondere alla disposizione ordinata dei gruppi; è possibile allora fare a meno delle marche decidendo di rispettare un ordine. In questo caso le aste sono allineate, il valore di un anello su ciascuna asta dipende dalla sua posizione nell'allineamento, una volta deciso quale sia l'asta delle unità e l'ordine da rispettare (vedi immagine a lato). In questo modo di organizzare l'attività sull'abaco, ha una funzione essenziale l'azione fisica e personale dei bambini di disporre le aste secondo criteri, stabiliti insieme, per rispondere alle esigenze della rappresentazione. Ogni azione implica e rafforza la rappresentazione mentale, come è stato messo in evidenza in un'esperienza di recupero in cui l'abaco è diventato strumento efficace, anche per i bambini in difficoltà, solo dopo che questi sono stati coinvolti con i compagni in una costruzione mimata dell'abaco [Longo, Avataneo, 2000].
Il passo successivo è registrare il numero sul quaderno, utilizzando i simboli delle cifre da 1 a 9 per la base 10, oppure da 1 a n-1 per una generica base n. Si osservi che, fissata la base n, ogni asta dell'abaco può contenere al massimo n-1 anelli: quando si arriva ad aggiungere l'ennesimo anello, si deve operare il cambio: n anelli su un'asta vengono cambiati con un solo anello sull'asta successiva. Se si vuole facilitare il riconoscimento della regola, si può stabilire la lunghezza delle aste in modo che su ciascuna si possano disporre solo 9 anelli e che posizionare il decimo ponga un problema concreto di spazio che aiuti a memorizzare la necessità del cambio.

Osservazioni didattiche

Sono prerequisiti essenziali l'ordine e la lateralizzazione. La scrittura dei numeri utilizza convenzioni molto forti, e per questo una condizione significativa per impararla è che il bambino sia consapevole (almeno in modo implicito) dell'importanza di addentrarsi in un mondo di artefatti che gli viene tramandato, indispensabile per comprendere la realtà che lo circonda.
Non si sottovaluti la difficoltà insita nell'idea di valore: se si contano 2 centinaia, 3 decine, 5 unità, gli oggetti visibili sono 10, ma di tipi diversi e non equivalenti. Questo può non essere facile per alcuni bambini, per i quali occorre continuare a ripetere esercizi di conteggio per gruppi, finché questa consapevolezza non sia conquistata. Non ci sono vie alternative miracolose.
Lo scopo del lavoro sui raggruppamenti è senz'altro lavorare sulla base 10, ma può essere utile cominciare a raggruppare con basi più piccole. La difficoltà in questo modo di operare non è la decina, ma comprendere che il gruppo formato con n oggetti è un nuovo oggetto da afferrare nella sua unità. Non ha molta importanza insistere un lungo tempo sulle decine, poi un lungo tempo sul centinaio, eccetera, perché ciò che deve essere compreso è il meccanismo del cambio.
Ci troviamo in pieno accordo con Vergnaud, che afferma: «Il limite aberrante dei numeri a due cifre costituisce più un ostacolo che un aiuto alla

comprensione del principio fondamentale della numerazione: cioè che una stessa cifra rappresenta un numero n volte più grande, in base n, se è posta nella seconda colonna verso sinistra, piuttosto che se è nella colonna delle unità; n volte più grande ancora, se è posta nella terza colonna e via di seguito. Il fatto che questo principio si applichi a tutte le traslazioni di una tacca verso sinistra non può essere spiegato se ci si limita ai numeri a due cifre» [Vergnaud, 1994].

Una caratteristica dello zero

Nella scrittura posizionale dei numeri emerge una caratteristica significativa dello zero. Consideriamo un raggruppamento particolare, in cui manca un ordine intermedio, come quello nell'immagine:

Osservando la situazione, riconosciamo senza ambiguità il numero «centotre», ma per rappresentare il numero con la scrittura posizionale, dobbiamo rendere riconoscibile l'esistenza di un posto vuoto. Lo otteniamo con un'ulteriore convenzione, l'uso di uno zero che toglie ogni ambiguità alla registrazione e quindi alla lettura. Infatti, senza lo zero si potrebbe interpretare:

1 3 → tredici? (se non si percepisce il posto vuoto tra le due cifre)

1 3 → centotre? (se si percepisce il posto vuoto)

Con lo zero si ha:

103 ⟶ centotre, senza nessuna ambiguità di lettura.

Abbiamo così scoperto un nuovo aspetto dello zero, collegato alla rappresentazione posizionale, oltre al primo aspetto di connotare il cardinale di un insieme vuoto. I bambini sono attualmente molto esposti alla scrittura e lettura dei numeri nella vita quotidiana e certamente conoscono molto presto lo zero, ma il suo uso nella scrittura posizionale comincia a rendere denso il significato di questa cifra veramente speciale.

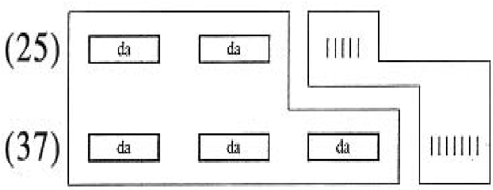
Applicazioni

Segnalo in modo sintetico tre tipi di applicazioni.
Primo. Dopo aver praticato sufficientemente le situazioni problematiche, quando i bambini conoscono con sicurezza il significato delle operazioni,

è il momento in cui la padronanza del raggruppare per 10, e della conseguente scrittura posizionale dei numeri, permette di avviare la costruzione degli algoritmi, componendo e scomponendo decine, centinaia, migliaia, eccetera, sia con oggetti che con l'abaco, eseguendo il cambio secondo regole interiorizzate. In questa fase le proprietà delle operazioni sono utilizzate in modo spontaneo come una conoscenza «in atto» [Longo, 2005].
Secondo. Dopo l'introduzione dei numeri decimali è proprio la scrittura posizionale che permette di uniformare la rappresentazione di naturali e decimali, i quali si possono rappresentare bene sull'abaco.
Terzo. Attraverso la conoscenza del valore posizionale si comprendono immediatamente la moltiplicazione e divisione per dieci e le equivalenze quando si opera un cambiamento di unità di misura.

La somma

Individuo su un esempio il processo di costruzione dell'algoritmo.



Per eseguire la somma 25+37, partiamo dai raggruppamenti che compongono i due numeri e contiamo complessivamente gli oggetti, raggruppando separatamente le decine e le unità come nell'immagine a lato:
Le decine sono complessivamente 5, le unità sono complessivamente 12 ed è necessario operare il cambio. Otteniamo così una decina da aggiungere alle precedenti (quella che chiamiamo «riporto») e due unità sciolte. Il risultato è quindi 62. Le proprietà associativa e commutativa sono utilizzate come una conoscenza «in atto» [Longo, 2005].
Il secondo passo è la trascrizione di quanto è stato eseguito, lavorando in riga:

$$25+37= (20+5) + (30+7)=(20+30) + (5+7) =50 + 12 =(50+10) + 2=62$$

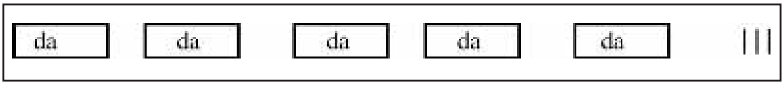
4	3	8	
3	9	7	+
7	12	15	
7	13	5	
8	3	5	

4	3	8	
3	9	7	+
7	12	15	
8	3	5	

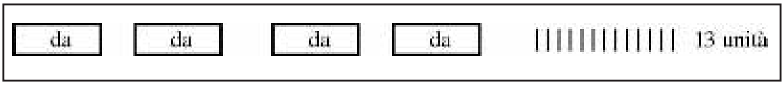
Le parentesi sono usate per ripercorrere il processo attuato, ma non sono indispensabili. Il terzo passo è l'operazione in colonna. Il riporto può essere indicato in vari modi. La rapidità è l'unico effettivo vantaggio rispetto all'operazione in riga, ma consiglio che sia conquistata con passaggi graduali, in modo da favorire la comprensione, attraverso la reinvenzione guidata. Molto interessante è la proposta di Freudenthal [1994, pag.88], che corrisponde agli schemi riportati a lato. Si tratta di un processo euristico: in ciascuna colonna del primo schema il bambino ha eseguito l'addizione superando la decina e opera il cambio con vari passi successivi, con il vantaggio di rallentare i tempi e conservare traccia del percorso eseguito.
Nel testo citato, questo è l'ultimo passaggio prima dell'usuale addizione in colonna. Con la stessa libertà, ciascun insegnante può sollecitare i bambini a inventare procedimenti e rappresentazioni per il riporto, finché li conduce, come ultimo stadio, ad accettare le convenzioni usuali di scrittura. La possibilità del riporto obbliga a partire dalle unità quando si opera in colonna: infatti le colonne successive alle unità possono venire alterate dal riporto.

La sottrazione

Possiamo procedere nello stesso modo. Per eseguire con il materiale l'operazione 53 – 27, rappresentiamo solo il numero 53 e togliamo da esso 27.



Poiché abbiamo solo 3 unità, per toglierne 7 dobbiamo sciogliere una decina ed associarla alle 3 unità libere.
Rappresentiamo quindi lo stesso numero in questo modo:



Togliendo 7 unità dalle 13 libere, ne restano 6; togliamo poi 2 decine e ne restano 2; ci troveremo davanti al raggruppamento del numero 26, che ci indica il risultato. Si noti che per la sottrazione occorre rappresentare con gli oggetti solo il primo numero. Anche in questo caso le proprietà dell'operazione sono riconosciute intuitivamente.
Trascriviamo in riga quanto abbiamo eseguito:

$$53 - 27 = (50 + 3) - (20 + 7) = (40 + 13) - (20 + 7) = (40 - 20) + (13 - 7) = 20 + 6 = 26$$

Rappresentiamo poi in colonna gli stessi calcoli, fissando un modo convenzionale di rappresentare il cambio eseguito, quando una decina si scioglie in 10 unità. Anche per la sottrazione in colonna è necessario partire dalla colonna delle unità, in quanto le colonne successive possono essere alterate dal cambio.

Per indicare il cambio (che qui si usa chiamare «prestito»), si potrà passare da convenzioni dentro la classe a convenzioni più generali. Per esempio si veda lo schema a lato.

(4)	(13)	
5	3	–
2	7	
2	6	

2	7	+
	...	
5	3	

Talvolta la sottrazione può essere sostituita da un'addizione incompleta, che è un'operazione disposta come un'addizione, di cui si conoscono il primo addendo e il risultato, come nello schema a lato.
È il modo in cui sovente, quando si maneggiano i soldi, si calcola il resto da dare.❖

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE/SITOGRAFICHE
Freudenthal Hans, *Ripensando l'educazione matematica*, La Scuola , Brescia 1994.
Longo Paola, Avataneo Giovanna:, *L'Abaco «vivente»*, in: D'Amore, Livori, Meloni, Pesci, *Interdisciplinarità e integrazione: riflessioni metodologiche sull'educazione matematica e sul suo ruolo*, Pitagora, Bologna 2000.
Longo Paola, *Imparare dai problemi di una bambina in difficoltà*, in: Aschieri, Pertichino, Sandri, Vighi, *Problemi ed alunni con problemi*, Pitagora, Bologna 1997.
Longo Paola, *Esperienza e apprendimento. Costanti di metodo nell'insegnare matematica. Emmeciquadro* n.24, agosto 2005.
Vergnaud Gérard, *Il bambino, la matematica, la realtà*, Armando, Roma 1994.