IMMAGINI MENTALI E RAPPRESENTAZIONI

nella struttura additiva

di Anna Paola Longo

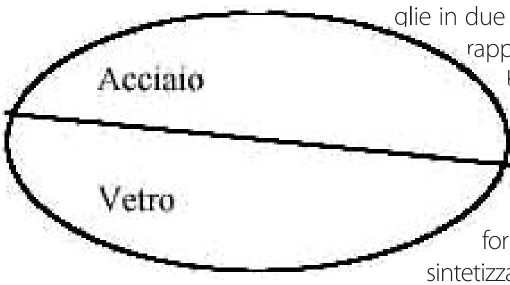
Gli insegnanti sono portati a credere che problemi diversi che si risolvono con una stessa operazione siano tutti della stessa difficoltà. Niente di più falso. La difficoltà di un problema non dipende solo dall'operazione, ma è legata a molti fattori, in parte linguistici, in parte dovuti alla conoscenza del contesto a cui si riferisce il problema. Un aspetto che determina diversi livelli di difficoltà è la tipologia del problema, perché da questa dipendono le immagini che la mente deve elaborare per rappresentare la situazione, passo necessario per costruire un procedimento risolutivo. L'autore esamina solo i problemi che si risolvono con addizioni o sottrazioni, in questi esplicita alcune possibili rappresentazioni schematiche, utili all'insegnante per comprendere la complessità della situazione e quindi il faticoso lavoro di rappresentazione interiore che devono fare gli allievi. Non ci si occupa invece della trasposizione didattica, che sarà poi lunga e complessa, e avverrà tenendo conto di tutte le cautele necessarie.

Chiamerò struttura additiva l'insieme dei problemi che si risolvono con un'addizione o con una sottrazione. In essa esaminerò alcuni tipi per mettere in evidenza le differenze dal punto di vista delle immagini mentali, strettamente personali, necessarie agli allievi per costruire la soluzione. Alcuni di questi problemi riguardano situazioni che contengono in modo implicito l'idea di numero relativo, anche se si possono risolvere usando solo numeri naturali (cioè senza segno).

Occorre subito una precisazione. Quando i matematici, riferendosi alle operazioni, parlano di una struttura, si riferiscono a un insieme **J** (astratto) dotato di una legge **T** di composizione interna (per esempio la somma o la moltiplicazione) di cui si possono studiare le leggi in modo decontestualizzato. Io parlerò invece di struttura riferendomi ai problemi. L'ottica dello sviluppo del pensiero (quella che interessa nell'insegnamento) richiede di considerare le situazioni che generano l'apprendimento e quindi i problemi, gli aspetti matematici sono quindi sempre contestualizzati. La formalizzazione mediante gli insiemi astratti potrà essere solo molto tardiva. Mi metterò dunque nell'ottica di Gerard Vergnaud che chiama «struttura additiva» l'insieme dei problemi che si risolvono con un'addizione o con una sottrazione. Egli dedica un notevole spazio sia alla classificazione dei problemi additivi che a quella dei problemi moltiplicativi nel campo dell'aritmetica. Riprenderò qui di seguito alcuni dei suoi esempi sulla struttura additiva integrandoli con altre situazioni di tipo geometrico [Vergnaud, 1994].

Partizione di un insieme

Il primo esempio riguarda addizione e sottrazione nel campo dei numeri naturali, l'enunciato è una situazione dalla quale si possono dedurre tre problemi, specificando una delle possibili domande.
Paolo ha 6 biglie in vetro e 8 in acciaio. Egli ha in tutto 14 biglie.
I numeri sono naturali perché indicano una numerosità, servono a contare insiemi «discreti» (e questa è una prima forma di misura).
P_1: Paolo ha 6 biglie in vetro e 8 in acciaio, quante biglie ha complessivamente?
Operazione: $6 + 8 = 14$
P_2: Paolo ha 14 biglie, 6 sono in vetro e le altre in acciaio, quante biglie ha in acciaio?
Operazione: $14 – 6 = 8$
P_3: Paolo ha 14 biglie, 8 sono in acciaio e le altre in vetro, quante biglie ha in vetro?
Operazione: $14 – 8 = 6$
Osserviamo che la situazione (e quindi la sua rappresentazione mentale) è statica, le biglie di vetro e di acciaio sono presenti contemporaneamente, possiamo immaginarle su un tavolo e pensare di guardarle contemporaneamente: le due diverse proprietà suddividono l'insieme complessivo delle biglie in due sottoinsiemi. I bambini possono rappresentare graficamente il problema con la massima libertà, pur di diversificare le biglie dei due tipi.



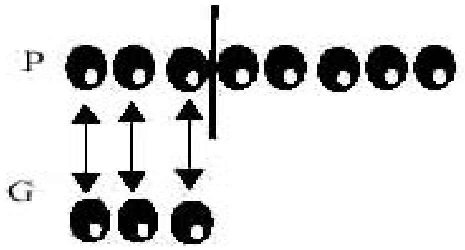
A loro non chiederemo la rappresentazione di Venn, molto formale, ma noi possiamo usarla per sintetizzare la situazione, che è la «partizione» di un insieme.
Ricordiamo che in una partizione di un insieme $\mathbf{U}$ ogni elemento di $\mathbf{U}$ appartiene ad uno, ed uno solo, dei sottoinsiemi $\mathbf{U}_i$ in cui $\mathbf{U}$ è suddiviso, perciò i sottoinsiemi hanno a coppie intersezione vuota, cioè non hanno elementi in comune.
Nel nostro caso non ci sono biglie che non siano né di vetro né di acciaio e ogni biglia se è di un tipo non può essere dell'altro (quindi non può appartenere a entrambi i sottoinsiemi).

Confronto tra misure in insiemi diversi: problemi di differenza

Partiamo da una situazione, da cui poi deduciamo alcuni problemi precisando la domanda [Longo, 2007].

Paolo ha 8 biglie, Giacomo ne ha 5 in meno. Dunque ne ha 3.

Paolo ha più biglie di Giacomo, Giacomo ha meno biglie di Paolo: le biglie di Giacomo possono essere poste in corrispondenza con un sottoinsieme delle biglie di Paolo, l'altro sottoinsieme delle biglie di Paolo si chiama «differenza» tra i due insiemi.



Ecco i problemi dedotti.

P_1: Paolo ha 8 biglie e Giacomo 3; quante ne ha in meno Giacomo?

Si applica una corrispondenza biunivoca mediante la quale si opera la suddivisione del primo insieme (biglie di Paolo), poi si conta: $8 - 3 = 5$ (ci si riconduce a una partizione del primo insieme e si conta la differenza, che, come abbiamo detto, è uno dei due sottoinsiemi della partizione).

P_2: Paolo ha 8 biglie e Giacomo 3; quante ne ha in più Paolo?

Stessa situazione, la differenza è linguistica.

P_3: Calcolare le biglie di Giacomo sapendo che ne ha meno di Paolo e che la differenza è di 5.

Sono possibili più modi per rappresentare la soluzione:

(1) $x + 5 = 8$ da cui si ricava $x = 8 - 5 = 3$ (x sono le biglie di Giacomo)

(2) suppongo che Giacomo ne abbia tante come Paolo (situazione ipotetica), ma di queste 8 ipotizzate ne mancano 5, dunque calcolo $8 - 5 = 3$

(3) soluzione per tentativi (stato iniziale ipotetico):

se Giacomo ne avesse 1: $8 - 1 = 7$, non va bene;

se Giacomo ne avesse 2: $8 - 2 = 6$, non va bene;

se Giacomo ne avesse 3: $8 - 3 = 5$, va bene;

quindi Giacomo ha 3 biglie.

La prima soluzione ha una difficoltà linguistica: dare un nome, prima di averla calcolata, alla quantità che si deve individuare; l'altra difficoltà è concettuale, usare il fatto che somma e sottrazione sono operazioni una inversa dell'altra.

La seconda soluzione mette in forma esplicita il comune ragionamento per cui si arriva subito a scrivere una sottrazione (operazione definita in un solo insieme, mentre nel testo del problema ce ne sono due).

La terza via è un procedimento molto interessante che gli insegnanti non apprezzano a sufficienza.

Anche questa volta la situazione (e quindi la corrispondente immagine mentale) è statica, ma per comprendere la situazione occorre porre una corrispondenza biunivoca tra le biglie di Giacomo e una parte delle biglie di Paolo.

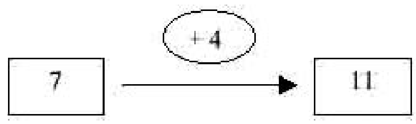
I numeri usati sono tutti naturali perché indicano quantità.

Trasformazioni

Passiamo ora a esaminare situazioni nelle quali compaiono nuovi fattori importanti, attraverso i quali si possono lentamente elaborare modelli non più insiemistici, che condurranno lentamente alla struttura matematica dei numeri relativi. In questa sede, in accordo con il linguaggio di Vergnaud, chiamo «trasformazione» una relazione che si svolge nel tempo, cioè una «relazione dinamica» [Vergnaud, 1994].
Vergnaud mostra come si può utilizzare in aritmetica il linguaggio delle trasformazioni in analogia al linguaggio delle trasformazioni di tipo chimico – fisico. Se prendiamo una bottiglia d'acqua, versiamo una polverina per esempio arancione e la agitiamo, possiamo confrontare la situazione iniziale con quella finale: l'acqua apparirà colorata. Nel tempo è avvenuta una trasformazione. Ma questa trasformazione è stabile? Se lasciamo ferma la bottiglia un tempo sufficientemente lungo, può accadere che acqua e polverina si separino oppure no; avremo dunque due diverse possibilità: o l'acqua è ancora colorata (non è successa una nuova trasformazione) oppure si è tornati allo stato iniziale con le componenti separate, mediante una nuova trasformazione.
Se versiamo nell'acqua una piccola quantità di terra, acqua e terra inizialmente si mescolano formando fango, ma poi la terra si deposita sul fondo e le due sostanze possono essere di nuovo separate. Possiamo dunque pensare a trasformazioni successive e parlare della loro «composizione» Tornando al linguaggio dell'aritmetica, possiamo porre una perfetta analogia nel caso delle trasformazioni di situazioni che coinvolgono i numeri.
Consideriamo il seguente esempio.
Sull'autobus ci sono 12 persone, quando si ferma ne salgono 4, quando l'autobus riparte ci sono 16 persone.
C'è un primo stato caratterizzato dalla presenza di 12 persone, una trasformazione nel tempo della sosta (le 4 persone che salgono), e un secondo stato caratterizzato dalla presenza di 16 persone.
Anche per noi, due diverse trasformazioni (o relazioni dinamiche) si possono applicare una di seguito all'altra (nell'esempio si può pensare alla fermata successiva) dando luogo a un'unica trasformazione che si dice «composta» delle due. Componendo una trasformazione con la sua inversa (i 4 viaggiatori scendono), si torna allo stato iniziale e la trasformazione composta si dice «identità». Spero che ogni insegnante comprenda che questo non è un linguaggio da trasferire immediatamente ai bambini, ma che ci è molto comodo per descrivere situazioni possibili.
È opportuno che i bambini inizino a sperimentare l'esistenza di «agenti» che modificano nel tempo alcune situazioni, introducendo il linguaggio «stato–trasformazione–stato» prima di simbolizzarlo e di applicarlo a situazioni che contengono i numeri. Parlare in aritmetica di trasformazioni offre la possibilità di esaminare interessanti situazioni problematiche che permettono di dare senso ai numeri con segno. Queste situazioni si possono gestire inizialmente solo con i numeri naturali, ma aprono la strada a passi successivi.
Facciamo ora alcuni esempi di trasformazioni in aritmetica.

Una trasformazione positiva

Consideriamo la situazione seguente [Vergnaud, 1994].
Paolo prima di iniziare a giocare aveva 7 biglie, poi ne ha vinte 4, ora ne ha 11.
Introduciamo un'opportuna rappresentazione, in cui indichiamo in due modi diversi i numeri che rappresentano la situazione iniziale e quella finale, che chiameremo «stati» (7 è lo stato iniziale, 11 lo stato finale) e la trasformazione (4, che esprime la vincita di Paolo).



I numeri che descrivono gli stati, contenuti in un rettangolo, indicano due quantità: il numero di biglie possedute da Paolo all'inizio (primo stato) e alla fine (secondo stato): sono perciò numeri naturali. Il numero che descrive la trasformazione, contenuto in un ovale, indica una vincita, ed esprime due informazioni: l'aumento delle biglie di Paolo e l'entità dell'aumento.
Se volessimo indicare simbolicamente quello che è successo, dovremmo utilizzare un simbolo nuovo, che contenga contemporaneamente due indicazioni, una sulla quantità (4) e l'altra sul fatto che si tratta di una vincita. Fatto salvo che l'approccio al simbolo e alla rappresentazione in una classe è sempre molto libero, la rappresentazione convenzionale è un numero preceduto da un segno: + 4. Questo è un numero «relativo». Naturalmente all'inizio i bambini possono usare questo simbolo senza una piena consapevolezza del suo significato, solo per indicare un aumento. Deduciamo ora i possibili problemi in senso ordinario mettendo l'incognita o su uno stato o sulla trasformazione.

P_1: Paolo all'inizio aveva 7 biglie e nel corso del gioco ne ha vinte 4, quante biglie ha alla fine del gioco?

Operazione: $7+4 = 11$ [con i numeri relativi sarebbe: $7+(+4) = 11$], troviamo il secondo stato;

P_2: Paolo ha vinto 4 biglie e alla fine del gioco ne ha 11 , quante biglie aveva prima di iniziare a giocare?

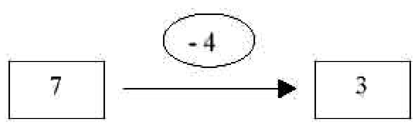
Operazione: $11 - 4 = 7$ [con i numeri relativi sarebbe: $11 - (+4) = 7$], troviamo il primo stato;

P_3: se Paolo all'inizio di una partita aveva 7 biglie e alla fine ne ha 11, come si è svolto il gioco?

Operazione: $11 - 7 = 4$; Paolo ha vinto 4 biglie (il numero naturale 4 viene identificato con il relativo +4); troviamo la trasformazione.

Una trasformazione negativa

Consideriamo la situazione seguente [Vergnaud, 1994].
Paolo prima di giocare aveva 7 biglie, durante la partita ne ha perse 4, ora ne ha 3.
Usiamo la rappresentazione convenzionale già vista nel caso precedente. Ora la trasformazione è una perdita.
Ci serve un simbolo che indichi che una quantità (4) ha giocato come perdita, e questo possiamo esprimerlo fa-



cendo precedere il numero da un segno.
Fatto salvo che l'approccio al simbolo e alla rappresentazione in una classe è sempre molto libero, la rappresentazione convenzionale è un numero preceduto dal segno meno: -4. Anche questo è un numero «relativo».
Dunque gli stati sono ancora rappresentati da numeri naturali, mentre la trasformazione è data da un numero relativo. Nella prima trasformazione (vincita) utilizziamo un numero relativo positivo, nella seconda (perdita) utilizziamo un numero relativo negativo.
Deduciamo ora i possibili problemi in senso ordinario mettendo l'incognita o su uno stato o sulla trasformazione.

P_1: Paolo all'inizio aveva 7 biglie e nel corso del gioco ne ha perse 4, quante biglie ha alla fine del gioco?

Operazione: $7 - 4 = 3$ [con i numeri relativi sarebbe: $7 + (-4) = 3$], troviamo il secondo stato;

P_2: Paolo ha perso 4 biglie e alla fine del gioco ne ha 3, quante biglie aveva prima di iniziare a giocare?

Operazione: $3 + 4 = 7$ [con i numeri relativi sarebbe: $3 - (-4) = 7$], troviamo il primo stato;

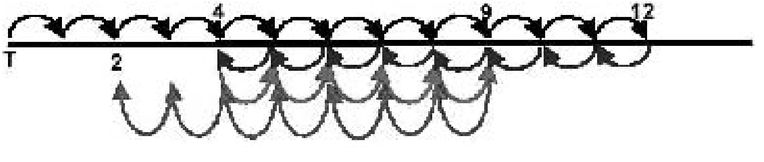
P_3: se Paolo all'inizio della partita aveva 7 biglie e alla fine ne ha 3, come si è svolto il gioco?

Operazione: $7 - 3 = 4$ [con i numeri relativi sarebbe: $3 - 7 = -4$], troviamo la trasformazione, che indica una perdita di 4 biglie.
Osserviamo che in entrambi i casi, per tornare dal secondo stato al primo stato si può ragionare ipotizzando di utilizzare la trasformazione inversa di quella data.

Direzione e verso

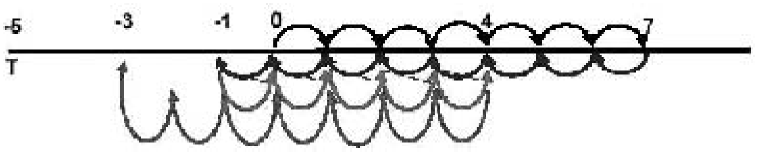
Anche gli esempi che faremo di seguito offrono grandi possibilità di introdurre i numeri relativi, non certo pensando agli aspetti formali ma al loro senso. Siamo comunque all'inizio!
Questo argomento riguarda la geometria, in cui direzione e verso sono elementi fondamentali per dare l'idea di cosa sia una retta. Infatti, all'inizio, per caratterizzare una retta, non possiamo parlare di punti o peggio ancora di infiniti punti, questo non avrebbe significato per i bambini perché il punto della geometria è una nozione molto astratta, veramente lontana dalla realtà.
In geometria ci si può accostare agli enti fondamentali attraverso l'esperienza fisica, che ciascuno attua personalmente attraverso il corpo e poi interiorizza in immagini. Una delle prime esperienze che si possono fare è camminare su una direzione (una corda tesa in terra, l'asse di equilibrio, eccetera) e su questa direzione muoversi avanti e indietro (la direzione rimane la stessa, ma cambia il verso). Su una direzione si può andare avanti e indietro; su qualsiasi «linea retta», su qualsiasi direzione (non solo quella su cui si cammina), si può immaginare un movimento secondo due versi distinti.

In questo movimento si può misurare un percorso eseguito e allora i numeri da usare saranno finalizzati alla necessità di capire come è avvenuto il percorso, cioè in quale verso.
Pensiamo a una linea ferroviaria lunga 100 km, su cui un treno va avanti e indietro, parte dalla stazione A, va in un certo tempo t_0 fino in B, facendo magari alcune fermate intermedie, poi da B riparte verso A e così via. Un viaggiatore sale in A e si addormenta, non si accorge della sosta in B né delle soste intermedie e quando si risveglia, si ritrova in A: se si accorge che è passato un tempo $2t_0$ (il doppio del tempo necessario per fare il percorso da A a B), capisce immediatamente cosa è successo. La sua posizione finale è identica a quella iniziale, non registra alcuno spostamento personale, mentre il treno ha percorso 2 interi tragitti e quindi 200 km. Per il viaggiatore ci sono fenomeni che dipendono dal primo calcolo (quello che porta a 0 km) e fenomeni che dipendono dal secondo (quello che porta a 200 km). Quali sono questi due tipi di calcolo? Precisiamolo su un esempio, che potrebbe essere alla portata dei bambini.
In un palazzo di 15 piani l'ascensore, inizialmente fermo al piano terra, compie questo percorso: sale di 12 piani - scende di 8 – sale di 5 – scende di 7.
In quale piano si trova alla fine di questo percorso?
Se chiamiamo «passo» lo spostamento tra un piano e il successivo, indipendentemente dal verso con cui si sta muovendo l'ascensore, di quanti passi è stato il suo percorso?
Sono domande diverse, entrambe dotate di senso, che dipendono da modi diversi di guardare la situazione. La prima domanda si riferisce a spazi «orientati», cioè legati al verso di percorrenza, tratta di una misura «orientata», la seconda domanda si riferisce a spazi non orientati, tratta di una misura «non orientata». In modo esplicito, nella scuola, si parla molto tardi di misura orientata, eppure si possono organizzare esperienze molto semplici in cui quest'idea viene coinvolta in modo intuitivo. Affrontare questo problema presuppone l'esperienza fisica di conteggio di passi avanti e indietro.
Sono possibili più rappresentazioni, in esse si deve indicare il piano terra e si deve sovrapporre un conteggio di spazi non orientati a un conteggio che tiene conto dell'orientamento.



Nel disegno i numeri sono stati usati per indicare *posizioni*. Il piano terra (inizio del percorso) può essere indicato con lo zero, ma spostando la partenza in uno dei piani intermedi del palazzo, si potrebbe dare, nella rappresentazione, indicatore zero a quella posizione ed utilizzare i numeri relativi per indicare le posizioni, come si fa normalmente nel riferimento cartesiano.

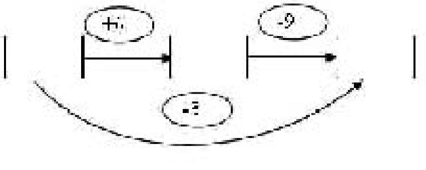
Diamo le operazioni per rispondere ai due quesiti
(1) $12 - 8 + 5 - 7 = 2$ (l'ascensore si trova al secondo piano)
(2) $12 + 8 + 5 + 7 = 12 + |-8| + 5 + |-7| = 32$ (passi del percorso)
Ho utilizzato il simbolo di «valore assoluto» di un numero relativo: esso coincide con il numero se questo è positivo, è il suo opposto se il numero è negativo ($|-8| = 8$, $|3| = 3$).
Esaminiamo una situazione simile, con partenza intermedia.
In un palazzo di 15 piani l'ascensore, inizialmente fermo al quinto piano, compie questo percorso: sale di 7 piani - scende di 8 – sale di 5 – scende di 7. In quale piano si trova alla fine di questo percorso?
Se chiamiamo «passo» lo spostamento tra un piano e il successivo, indipendentemente dal verso con cui si sta muovendo l'ascensore, di quanti passi è stato il suo percorso?



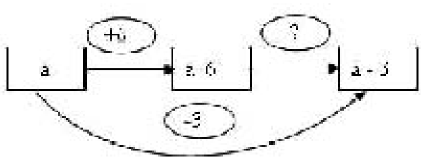
Nel riferimento che ha come origine il punto di partenza i calcoli sono:
(1) $0 + 7 - 8 + 5 - 7 = -3$ (l'ascensore si trova nella posizione –3, cioè al secondo piano)
(2) $7 + 8 + 5 + 7 = 7 + |-8| + 5 + |-7| = 27$ (passi del percorso)
Nel riferimento che ha come origine il piano terra, il primo calcolo diventa: $5 + 7 - 8 + 5 - 7 = 2$, dando un numero diverso, ma la stessa indicazione del piano; il secondo calcolo resta identico perché non si tratta più di posizioni ma di passi.
Anche in questo caso i problemi possono essere risolti usando solo i numeri naturali, ma nello sfondo c'è una sotterranea presenza dei numeri relativi, accompagnati da immagini che non sono più legate alla sola quantità.

Confrontare trasformazioni

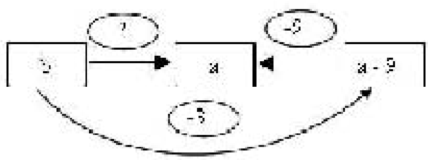
Consideriamo la situazione seguente [Vergnaud, 1994].
Paolo ieri ha vinto 6 biglie e oggi ne ha perse 9; in tutto ne ha perse 3.
In questo testo i numeri sono tutti relativi perché esprimono trasformazioni; la particolarità della situazione è che non sono indicati gli stati, ed è la difficoltà specifica di questa classe.
Quindi le relazioni tra le trasformazioni valgono indipendentemente dagli stati e ciò vale anche per i problemi che dedurremo.
Ecco a lato la rappresentazione



Come nei casi precedenti, deduciamo alcuni problemi precisando la domanda.
P_1: Paolo nella prima partita aveva vinto 6 biglie, ma alla fine della seconda partita si accorge che complessivamente ne ha perse 3.
Cosa è successo nella seconda partita?



Notiamo che la trasformazione -3 è la trasformazione composta della prima, +6, e della seconda, questa volta incognita.
Le possibili soluzioni sono:
(1) $6 + x = -3$ da cui si ricava $x = -(6 + 3) = -9$
(2) stato iniziale ipotetico: se lo chiamiamo a, allora il secondo stato è $(a + 6)$, ma il testo ci dice che lo stato finale è $(a - 3)$.
La domanda è come si passa da $(a + 6)$ (secondo stato) ad $(a - 3)$ (stato finale). Per farlo, Paolo perde le 6 biglie di $(a + 6)$ e poi ne perde altre 3, quindi ne perde 9: $6 + 3 = 9$.
Trattandosi di una perdita, la seconda trasformazione è -9.
P_2: Paolo nella seconda partita ha perso 9 biglie, ma alla fine del gioco si accorge di averne perse solo 3 rispetto all'inizio.
Cosa è successo nella prima partita?



Le possibili soluzioni sono:
(1) $-9 + x = -3$ da cui si ricava $x = 9 - 3 = 6$
(2) stato iniziale ipotetico
Nelle immagini, **b** indica il primo stato, **a** il secondo stato.
Il terzo stato può essere indicato contemporaneamente con $(a - 9)$ oppure con $(b - 3)$.
Si ha perciò un'uguaglianza:

$$a - 9 = b - 3; a = b + 9 - 3; a = b + 6$$

e perciò la trasformazione è + 6 (vincita). ❖

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE
Longo A.P., *Educazione linguistica in matematica (2), Problemi di differenza nella scuola primaria*, in *Emmeciquadro*, n. 29, aprile 2007.
Vergnaud G., *Il bambino, la matematica, la realtà*, Armando, Roma 1994.