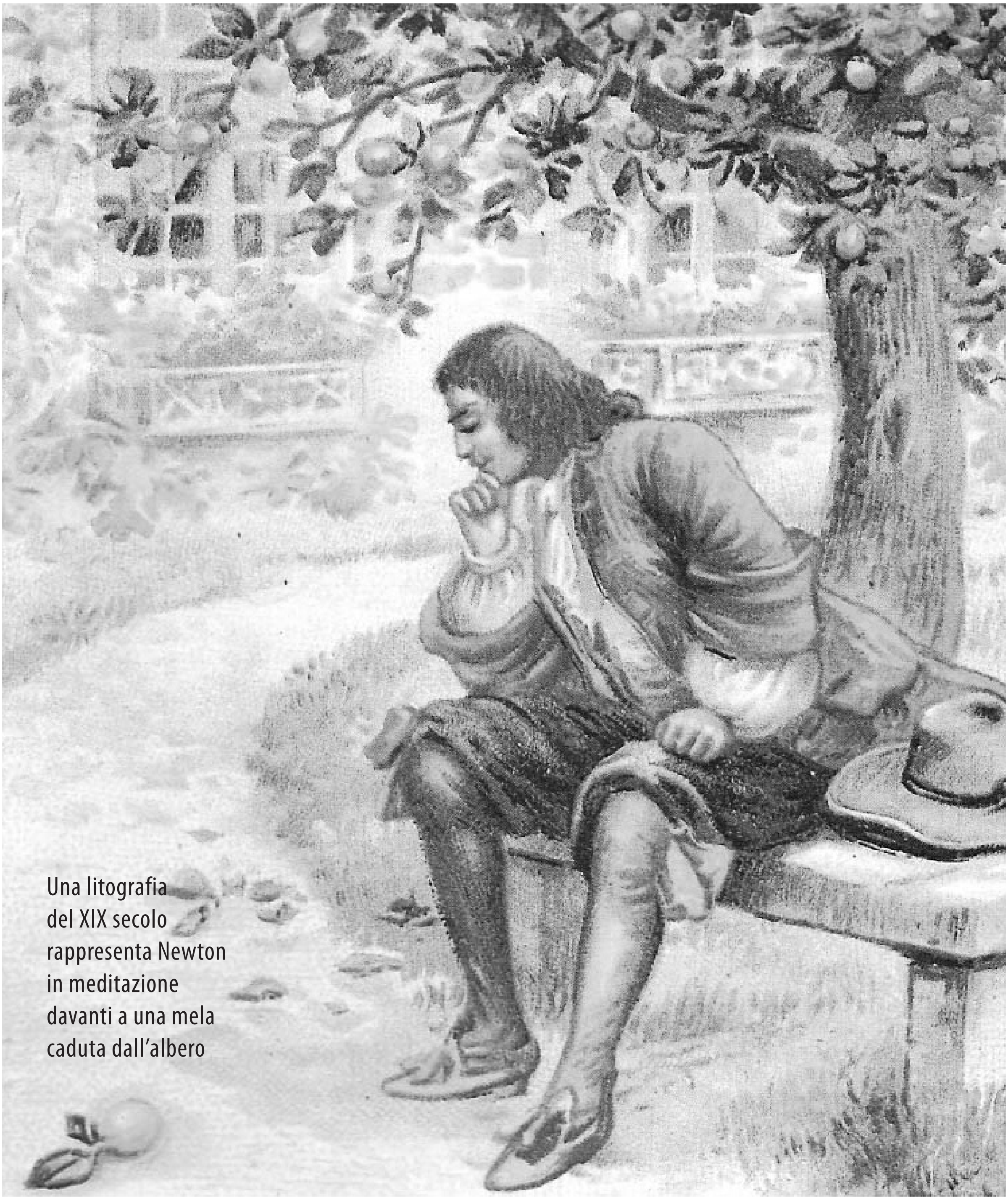


Una litografia
del XIX secolo
rappresenta Newton
in meditazione
davanti a una mela
caduta dall'albero

LA MELA O LA LUNA DI NEWTON?

l'itinerario concettuale verso la forza gravitazionale

*di Vittorio Banfi**

L'itinerario concettuale percorso da Newton per arrivare a descrivere il moto dei pianeti partendo dalle leggi della dinamica era disseminato di ostacoli, anche perché mancavano gli strumenti matematici per tradurre in formule le intuizioni fisiche. L'autore mostra i passaggi essenziali. Prima la deduzione della formula dell'accelerazione del moto circolare uniforme, con metodo che prelude alla derivata. Poi, diversi anni più tardi, il lavoro sistematico, che portò alla deduzione della forza di gravitazione a partire dalle leggi di Keplero. Punto essenziale del lavoro, che richiese a Newton l'invenzione della derivata, fu la dimostrazione che la forza esercitata da un corpo celeste equivale a quella esercitata da un punto materiale posto nel suo centro e con massa uguale alla massa totale del corpo. Infine l'autore accenna al fatto che il test della validità universale delle leggi newtoniane è stato, in tempi recenti, l'invio dei satelliti artificiali.

Durante un pomeriggio estivo Isaac Newton si sedette sotto un melo: un pomo, distaccatosi dall'albero, cadde colpendo la testa del Nostro. Allora egli pensò che, come un grave è attratto dalla Terra, così nello spazio cosmico i pianeti «cadono» verso il sole, ma non vi si avvicinano perché una forza opposta ed equivalente li mantiene a distanza. Da qui l'intuizione della gravitazione universale. Questo racconto oggi non gode più alcuna credibilità: esso è riportato nell'*opera omnia* di Voltaire, che affermava di averlo ascoltato da una nipote di Newton [1]. Tuttavia un albero di mele fu a lungo additato ai visitatori come l'oggetto ispiratore del genio. Al di là dell'ironia su questo racconto, nel presente articolo si tenterà di descrivere l'intera storia concettuale della fondamentale scoperta.

*Nato a Milano, si è laureato al Politecnico nel 1952 e ha conseguito la Libera Docenza nel 1966. Ha lavorato, dal 1969 al 1984, come collaboratore esterno presso l'Osservatorio di Pino Torinese. Membro del Centro di Astrodinamica «G. Colombo», vive a Milano dal 1987 collaborando con il Dipartimento di Fisica e Matematica dell'Università degli Studi. La sua ricerca si è sviluppata nel campo dell'Astrofisica teorica del Sistema Solare.

Da un'intuizione di Plutarco

L'autore delle *Vite parallele* (46-120 d.C.) scrisse anche, tra gli altri, un piccolo trattato dal titolo *De facie in orbe Lunae* [2]. Egli fu sostenitore di una teoria della gravitazione secondo cui i centri della Terra, del Sole e della Luna, erano vari centri di attrazione indipendenti. Notevole è il passo seguente «La Luna riceve garanzia di non cadere, proprio dal suo movimento e dallo slancio della sua rivoluzione, esattamente come i sassi posti nella fionda non possono cadere per il moto circolare vorticoso; infatti ogni cosa è trascinata dal suo semplice moto naturale solo se non è deviata da qualcos'altro. La Luna dunque non è trascinata in basso dal proprio peso, perché la sua naturale tendenza è frustrata dalla rivoluzione. E anzi, vi sarebbe motivo di meraviglia se essa stesse ferma sempre nel medesimo luogo come la Terra ».

La lettura di questo passo, eccezionale in ogni sua proposizione, è certamente stata per Newton una grande fonte di ispirazione al fine di giungere alla scoperta della gravitazione universale.

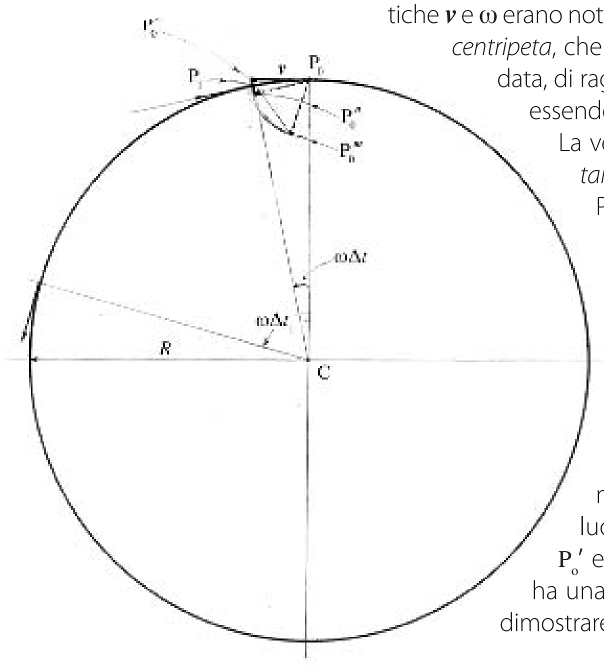
In una collezione di manoscritti newtoniani[1], si trova un appunto, scritto dal Nostro in tarda età, in cui si legge testualmente «[…] dedussi nel 1666 che le forze che mantengono i pianeti nelle loro orbite debbono essere reciproche ai quadrati delle distanze dai centri attorno a cui rivolvono: donde, paragonando la forza necessaria a mantenere la Luna nella sua orbita con la forza di gravità sulla superficie della Terra, io trovai che corrispondevano assai bene […]». Tutto questo a 24 anni, ancora studente, durante la grande peste che, da Cambridge lo fece riparare a Woolsthorpe, il suo «natio borgo selvaggio».

Esaminiamo i vari stadi del ragionamento complessivo seguito da Newton. Innanzitutto vi è lo studio accurato del moto circolare uniforme di un punto mobile attorno a un altro punto fisso **C** detto centro. Le grandezze cinematiche $\boldsymbol{v}$ e ω erano note, ai tempi di Newton, ma non lo era l'*accelerazione centripeta*, che costringeva il punto mobile **P** sulla circonferenza data, di raggio R, con velocità costante in ampiezza $v = \omega R$, essendo ω la *velocità angolare* dello stesso punto mobile. La velocità $\boldsymbol{v}$ è detta, per ovvie ragioni, anche *velocità tangenziale*.

Primo compito di Newton fu di calcolare l'accelerazione centripeta in funzione di ω e di R. In un certo istante il punto mobile transita in P_o. La sua velocità $\boldsymbol{v}$ è diretta tangenzialmente. Dopo un intervallo di tempo Δt, abbastanza piccolo, il punto mobile si è portato in P_1. Esso è ora dotato di una velocità tangenziale identica (in ampiezza) $\boldsymbol{v}$, il senso è ancora antiorario ma con direzione variata di una piccola entità $\Delta\boldsymbol{v}$. Esaminando l'immagine a lato, si vede la variazione $\Delta\boldsymbol{v}$, che darà luogo alla accelerazione centripeta (compresa tra P_o' e P_o'' e diretta verso l'interno della circonferenza), ha una ampiezza fornita dalla formula $\Delta v \cong v\, \omega\, \Delta t$. Per dimostrare ciò trasportiamo parallelamente il vettore velo-

[1] Il manoscritto è contenuto nella collezione di carte newtoniane regalate nel 1872 da Lord Portsmouth all'Università di Cambrige. Vedere anche L. Rosenfeld Arch. Hist. Exact Sci, VOL. 2.

Costruzione geometrica per valutare la variazione $\Delta\boldsymbol{v}$, nel moto circolare uniforme, che provoca l'accelerazione centripeta



cità (spiccato da P_1) sino a portare l'origine in P_o e rappresentiamolo per chiarezza con il tratteggio. Allora è facile vedere che, essendo $\Delta\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v})_{inP_0} = (\boldsymbol{v})_{inP_1}$, l'ampiezza della variazione $\Delta\boldsymbol{v}$ si scosta assai poco dal piccolo arco di circonferenza (centro in P_o e raggio $v = \omega R$) che sottende l'angolo $\omega\Delta t$.
Pertanto $\Delta v \cong v\,\omega\Delta t = \omega^2 R\,\Delta t$, come si voleva dimostrare.
Inoltre $\Delta\boldsymbol{v}$ è diretto quasi come il raggio P_1C. Assumendo un intervallo di tempo maggiore $\Delta t_1 > \Delta t$, ciò non è vero. In tal caso, come si vede in figura 2, l'arco P_1P_o''', non essendo più abbastanza piccolo, differisce dalla corda: ne consegue che non è più valida la formula or ora proposta per Δv e lo stesso vettore variazione non ha più la direzione passante per C.
Ragionando per continuità, in una successione $\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3 \ldots > \Delta t$ ci avviciniamo sempre più alla condizione precedente con Δt. Se si assumono allora su tutta la circonferenza molti archi uguali di ampiezza $\omega\,\Delta t$ e si sommano insieme otteniamo:

$$\text{variazione totale } (\Delta v)_{tot} \cong \omega^2 R\,\Sigma\Delta t = \omega^2 R\,T\,,$$

cioè ancora

$$a_c = \frac{\text{variazione totale in un periodo } (\Delta v)_{tot}}{\text{intervallo di tempo della variazione } T} = \frac{(\Delta v)_{tot}}{T} \cong \omega^2 R\,,$$

ossia l'accelerazione centripeta cercata. Il processo continuo con cui si passa, dalla spezzata chiusa poligonale con lati uguali, alla circonferenza circoscritta era già ben noto nella matematica dell'antica Grecia, come anche era noto a Newton il calcolo vettoriale elementare (grandezze vettoriali, parallelogramma delle forze…) in seguito agli studi di Galileo e degli altri matematici a lui contemporanei. È interessante osservare che nella formula

$$a_c = \omega^2 R\,, \qquad (1)$$

o meglio nella sua derivazione del 1666, è contenuta in *nuce* l'intuizione degli infinitesimi (l'intervallo Δt è *quasi* un infinitesimo) e del calcolo integrale. Si può affermare che la relazione (1) è ottenuta al *limite* del passaggio dalla spezzata poligonale alla circonferenza.
Ed ora veniamo alla seconda parte del ragionamento.
Nella proposizione IV del III libro dei *Principia* [3] si legge:
«La Luna gravita verso la Terra ed è sempre distratta dal moto rettilineo e trattenuta nella sua orbita dalla forza di gravità».
Vediamo come ora evolve il ragionamento. Con la relazione (1) è stata dimostrata la formula che fornisce l'accelerazione centripeta, nel caso di orbita circolare. La distanza Terra–Luna è assunta pari a 384000 km e la velocità angolare $\omega = 2{,}653\ 10^{-6}$ rad s^{-1}.
Allora abbiamo: accelerazione centripeta della Luna $a_c = 2{,}703\ 10^{-3}$ m s^{-2}; formando il rapporto:

$$\frac{\text{accelerazione di gravità alla superficie terrestre}}{\text{accelerazione centripeta della Luna}} = \frac{9{,}81}{2{,}703\ 10^{-3}}\,,$$

si ottiene 3629,3 (che differisce, dell'8‰, da 3600 = 60^2).

È stato tenuto conto che il raggio medio dell'orbita lunare è pari a 60 volte il raggio della Terra (rapporto pressoché valido anche oggi). Pertanto si può concludere con Newton che l'accelerazione centripeta, dovuta alla gravità della Terra, sulla superficie di quest'ultima, sta all'accelerazione centripeta della Luna, nel suo moto attorno alla Terra, come il quadrato del raggio orbitale lunare sta al quadrato del raggio terrestre.
Dalle accelerazioni si passa alle forze motrici moltiplicando semplicemente per le masse dei relativi corpi (II legge della dinamica newtoniana) e quindi le forze di gravità decrescono con l'inverso quadrato delle distanze dal centro attraente.

Verso una completa e generale teoria della gravitazione

Alla fine della proposizione IV (III libro dei *Principia*), citata nel precedente paragrafo, si trova uno scolio che si conclude con le seguenti parole: «Pertanto la forza, per effetto della quale la Luna è trattenuta nella propria orbita, sarà quella stessa che siamo soliti chiamare gravità». Newton riconobbe che il moto dei sassi in caduta, quello delle mele dai rispettivi alberi, quello della Luna, altro non sono che effetti particolari della *forza di gravitazione universale*, sempre in azione tra due corpi qualsiasi. Nei casi semplici il moto complessivo può venire descritto e predetto con l'ausilio della analisi matematica. In casi più complessi la descrizione è ancora più complicata, ma i principi fondamentali sono gli stessi.
Ritorniamo alla precisione del calcolo contenuto nel paragrafo precedente: occorre tenere presente che detto calcolo è una prima approssimazione. È stato giustamente detto che esso non forniva un accordo numerico soddisfacente, poiché il valore del raggio della Terra e degli altri dati astronomici usati da Newton non erano corretti. Per esempio la forma ellittica dell'orbita della Luna (con un'eccentricità pari a 0,0549) doveva influire sul risultato e Newton ne era perfettamente conscio. La dimostrazione più esatta e completa, come vedremo successivamente, fu raggiunta dal Nostro circa 18 anni dopo. Vi era poi un'ulteriore difficoltà. Il calcolo è semplice solo se non si considerano le dimensioni della Luna e della Terra e si ritiene che, per gli effetti sui punti ad esse esterni, le loro masse agiscano come se fossero concentrate in punti coincidenti con il loro centro geometrico.
È storia lunga e complessa fornire una spiegazione dettagliata della ricerca incessante di Newton, a partire dal primo ma assai geniale calcolo del 1666, sino a raggiungere il suo obiettivo: una completa e razionale teoria della gravitazione applicata al moto degli astri. La spiegazione diacronica di questa ricerca è ardua a causa della mancanza di documenti, notizie, delucidazioni da parte dello stesso Newton. Non si può dire comunque che, nei suddetti 18 anni, il Nostro si sia occupato solo di questa grande

sintesi: ne fa fede, se non altro, l'ampiezza delle tematiche che occupano il II Libro dei *Principia* [4]. Esse infatti comprendono problemi particolari sul moto dei proiettili in un mezzo resistente, l'idrostatica, la fluidodinamica dei liquidi viscosi e altro ancora; a tutto ciò sovrastava, nella mente del Nostro, il programma di sintesi testé citato. I dati di partenza erano già presenti: le tre leggi di Keplero.
Si richiamano di seguito per comodità.

I legge (o della eccentricità delle orbite)
Ciascun pianeta compie rivoluzioni attorno al Sole seguendo un'orbita ellittica di cui il centro del Sole occupa uno dei fuochi.
II legge (o delle aree)
Ciascun pianeta si muove sulla sua orbita in modo tale che è costante nel tempo l'area descritta dal raggio vettore (ossia il segmento congiungente il centro del Sole e il centro del pianeta).
III legge (o dell'armonia del mondo)
Il quadrato del tempo di rivoluzione di ciascun pianeta è proporzionale al cubo del semi–asse maggiore dell'orbita.

Newton si propose di dimostrare, partendo da queste leggi sperimentali (o meglio osservative), che scaturiva, come conseguenza logica e necessaria, la legge di gravitazione.
Egli iniziò lo studio matematico della II Legge; si tenga presente, come inciso, che queste leggi di Keplero non erano state tenute nella dovuta considerazione dagli scienziati del Seicento. In particolare la maggior parte delle opere di astronomia di questo secolo non citava neppure la II Legge. Fu Newton l'unico scienziato a elevare questa legge delle aree alla considerazione di cui essa gode tuttora, e a impiegarla acutamente per raggiungere il suo obiettivo teorico. Egli dimostrò che tale legge è una condizione necessaria e sufficiente per il *moto centrale* di ogni corpo nello spazio.
Dicesi moto centrale quel moto in cui l'oggetto mobile è sottoposto a una forza *costantemente diretta* verso un punto centrale (o anche detto centro del moto). Vale a dire, tutte le volte che un corpo mobile è soggetto a una forza *centrale*, allora rispetta, durante il suo moto, la legge delle aree; inversamente tutte le volte che un corpo si muove intorno a un punto centrale rispettando la legge delle aree, allora tale corpo è soggetto a una forza costantemente diretta verso il centro del moto. Questa dimostrazione matematica introdusse una meccanica celeste radicalmente nuova, perché fondata sui concetti di quantità di moto, di massa, di inerzia, di momento angolare e di forza dinamica. Già in apertura del trattato di Keplero [5] *Astronomia nova* (1609) è proposto l'obiettivo di fondare una *Physica coelestis* basata sulle cause meccaniche. Newton realizzò questo programma, di cui Keplero aveva avuto solo una intuizione.

Successivamente il Nostro si accinse a sviluppare il suo nuovo e originale metodo di calcolo, detto delle *flussioni*, il padre dell'attuale calcolo infinitesimale ed integrale [6,7].
In queste circostanze lo stile newtoniano si rivela pienamente: esso consiste in uno *scambio ripetuto* tra un *costrutto matematico* e la *realtà fisica*. E si perviene anche al *punctum dolens* nella elaborazione della teoria della gravitazione. Occorre infatti sciogliere il dubbio avanzato nel paragrafo di pagina 63 (*Da un'intuizione di Plutarco*): un uomo, sulla superficie terrestre, sperimenta l'attrazione come se tutta la massa della Terra fosse concentrata nel centro terrestre oppure no?
La risposta è affermativa ed è contenuta nel I Libro dei *Principia* in due teoremi: proposizione LXX, teorema XXX e proposizione LXXI, teorema XXXI.[2] Entrambi sono stati definiti da W. L. Glaisher «teoremi superbi».[8] Per una dimostrazione assai chiara e dettagliata, vedasi l'eccellente articolo di M. Galuzzi [9]. Restano la I e la III Legge di Keplero da utilizzare, per completare la ricerca. Abbiamo un *corpo primario*, il Sole, di cui si può ora proporre il «modello fisico» del punto geometrico dotato di massa, in una parola composta il «punto–massa». A *fortiori* il pianeta, cioè il *corpo secondario*, sarà assimilabile anch'esso al «punto–massa», che compie rivoluzioni attorno al primario. È nota, per la III legge di Keplero, l'orbita di quest'ultimo: essa è un'ellisse di cui il Sole occupa uno dei due fuochi. Qual è il tipo di forza centrale sperimentata dal pianeta? La risposta è riportata nel I Libro dei *Principia*, alla proposizione XI, problema VI, che recita «Un corpo ruoti lungo un'ellisse si richiede la legge della forza centripeta [centrale] quando tende al fuoco dell'ellisse». La dimostrazione è di tipo geometrico e assai sintetica. Newton conclude «la forza centripeta è inversamente proporzionale al quadrato della distanza **SP**», dove **S** è il punto–massa Sole e **P** il punto–massa pianeta. Per una dimostrazione più completa e didatticamente più efficace, per il lettore contemporaneo, si consiglia l'ottimo articolo di J. T. Cushing, *Dalle leggi di Keplero alla legge di gravitazione universale* [10]. Occorre osservare che, con il modello punto–massa tale legge assume la seguente formulazione: «Dato il punto–massa M_S (con M_S si indica la massa del Sole) e il punto–massa m_P (con m_P si indica la massa del pianeta), distanti r, la forza con cui il Sole attrae il Pianeta F_{PS} e la forza con cui il pianeta attrae il Sole F_{SP} sono legate dalle formule

$$(2)\quad F_{PS} = F_{PS} = G\,\frac{M_S\ m_P}{r^2}\ \text{[con G costante di gravitazione universale].}$$

In generale due punti–massa m_1 ed m_2, posti a distanza r, si attraggono mutuamente con una forza diretta lungo la loro congiungente ed avente l'intensità:

$$(3)\qquad F = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\ .$$

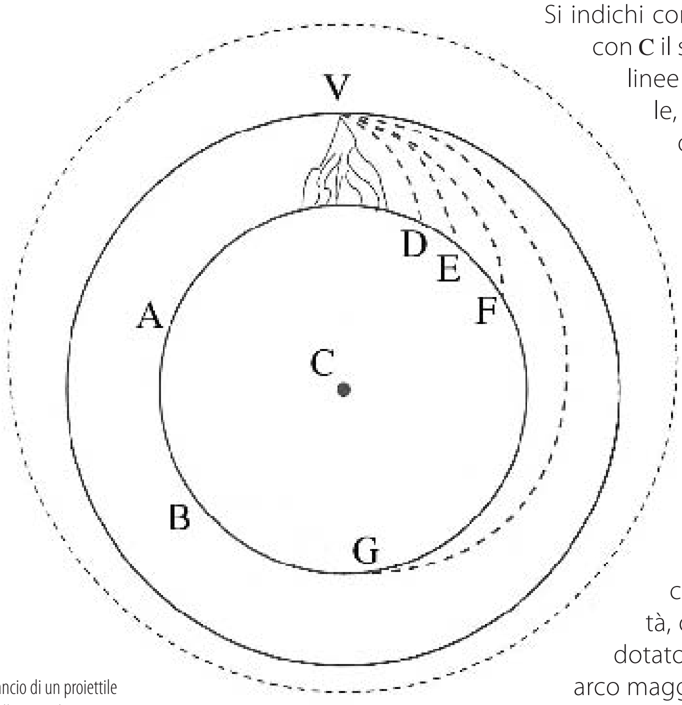
quindi la forza che il punto m_2 esercita sul punto m_1 e quella che il punto m_1

[2] I due enunciati dei teoremi sono: «Se ogni punto di una scorza sferica (o superficie sferica) è soggetto ad una forza attrattiva gravitazionale uguale a quella cui è soggetto un punto opposto, dico che un corpuscolo posto dentro tale superficie non è attratto da queste forze verso alcuna parte.»
«Poste le medesime cose, dico che un corpuscolo, posto fuori dalla superficie sferica è attratto verso il centro della sfera con una forza inversamente proporzionale al quadrato della sua distanza dello stesso centro.»
Il secondo teorema vale quindi per corpi sferici, omogenei come densità, oppure con quest'ultima variante solo con la distanza dal centro (simmetria centrale).

esercita sul punto m_2 sono uguali e opposte.
La (3), unitamente alle tre leggi della dinamica di Newton, fonda la meccanica celeste classica.
Questo risultato, raggiunto da Newton probabilmente nel 1684, doveva avere subito importantissime applicazioni, contenute nei *Principia* (pubblicato nel 1687). Fra le più importanti citiamo: la spiegazione dei complessi particolari del moto lunare, del fenomeno delle maree, della precessione degli equinozi, dell'equivalenza tra massa gravitazionale e massa inerziale (così importante per la genesi della teoria della relatività) e di altro ancora.
Inoltre la dimostrazione dell'esistenza di orbite non solo ellittiche, ma anche *paraboliche* e *iperboliche*, estese la famiglia delle orbite a tutte le sezioni coniche di Apollonio di Perge.
Si può affermare infine che forse nessuna estrapolazione, nella cosmologia moderna e contemporanea, uguaglia per audacia intellettuale il *colossale balzo* compiuto da Newton col derivare la dinamica dei pianeti e delle comete, dagli effetti gravitazionali osservati sulla Terra.

La nascita della astrodinamica dei satelliti artificiali e delle sonde interplanetarie

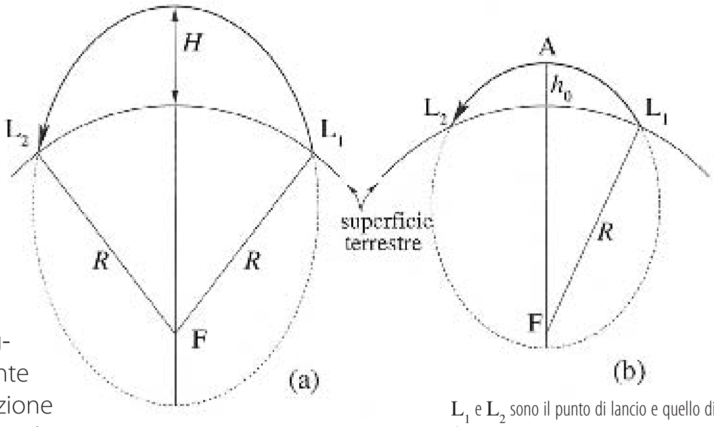
A partire dal lancio dello Sputnik (ottobre 1957) la possibilità di estrapolazione, di cui si è detto nel finire del precedente paragrafo, non era mai stata sottoposta, per così dire, a «collaudo», per il semplice motivo che i mezzi tecnici, a disposizione dell'uomo, non consentivano di condurre esperimenti controllati. Ci si doveva accontentare di ciò che natura «generosamente» ci elargiva.
Da quell'ottobre 1957 nacque l'astrodinamica dei satelliti artificiali e da allora la meccanica celeste divenne anche una scienza sperimentale–operativa. Si pensi, per esempio, al calcolo, alla preparazione–sperimentazione e alla realizzazione di una operazione di *fly–by* di una sonda spaziale verso Saturno. [11]
Stupefacenti sono le intuizioni newtoniane delle orbite dei satelliti artificiali e delle sonde spaziali.
Nel *Sistema del mondo* [3] si trova la figura riportata alla pagina seguente, accompagnata dal seguente commento: «È il movimento dei proiettili a spiegare come i pianeti possano essere trattenuti da forze centripete in orbite determinate. Se scagliamo una pietra, essa, spinta dalla sua gravità, devierà da un corso in linea retta, descriverà una traiettoria curva nell'aria e finalmente cadrà a terra. A seconda che sia maggiore la forza con la quale è stata lanciata, la pietra si spingerà più lontano. Aumentando la velocità, potrebbe descrivere un arco di uno, due, cinque, dieci, cento, mille miglia, finché, spintasi oltre i confini della Terra, non ricadrebbe più su di essa.



Lancio di un proiettile dalla vetta di un monte

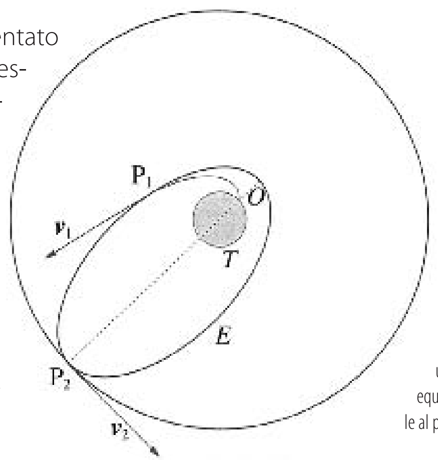
Si indichi con **AFB** la superficie della Terra, con **C** il suo centro; e con **VD**, **VE**, **VF**, le linee curve che descrive il proiettile, successivamente lanciato con diversi gradi di velocità, sempre maggiori, dal vertice **V** di un monte molto alto, secondo linee parallele all'orizzonte. Affinché non venga considerata nel calcolo la resistenza dell'aria, che difficilmente può ritardare i moti celesti, immaginiamo che essa sia stata completamente soppressa, o che almeno non opponga nessuna resistenza. La stessa ragione per la quale un corpo, dotato di minore velocità, descrive un arco minore **VD**, e, dotato di una velocità maggiore, un arco maggiore **VE**, e, aumentando ancora questa sua velocità, si spinge più lontano fino a F e più lontano ancora fino a **G**, fa sì che, se si continua ad aumentare la velocità, questo stesso corpo riuscirà a superare l'ambito di tutta la Terra, e ritornerà al monte, donde era stato lanciato. E poiché, condotto un raggio al centro della Terra, l'area descritta è (per la Proposizione I del I Libro dei *Principia Mathematica*) proporzionale al tempo, la sua velocità, tornando al monte, non sarà minore di quella iniziale: conservata pertanto la velocità, tale corpo potrà girare più volte secondo questa stessa legge.
Immaginiamo ora che dei corpi vengano gettati in direzione orizzontale da regioni ancora più alte: alte, per esempio, cinque, dieci, cento e mille e più miglia, o altrettanti semidiametri terrestri; allora in rapporto alla diversa velocità dei corpi e alla forza di gravità esercitata nelle singole zone, verranno descritti archi concentrici alla Terra, o variamente eccentrici rispetto ad essa. In queste traiettorie i corpi continueranno a percorrere i cicli a somiglianza dei pianeti.»
Nell'immagine è rappresentato schematicamente un picco di una montagna che si erge sulla superficie terrestre e dalla cui sommità si lanciano proiettili con varie velocità iniziali. Nelle traiettorie **VD**, **VE**, **VF**, e **VG** la velocità iniziale impressa non è sufficiente, come nel caso dell'orbita circolare in grassetto, a stabilizzare il corpo lanciato su una circonferenza con centro coincidente col centro della Terra **C**.

Orbene: i casi precedenti VD, VE, VF, VG altro non sono che voli sub–orbitali (nella astrodinamica attuale).
Come si vede nell'immagine a lato, che rappresenta le traiettorie suborbitali di una sonda, la sonda è lanciata in L_1 e tocca nuovamente il suolo terrestre in L_2. In (a) il tratto dell'orbita è un'ellisse (che si completerebbe nella parte tratteggiata) con un fuoco in F, coincidente con il centro terrestre. Una situazione analoga è rappresentata in (b), in cui l'arco di traiettoria appartiene a un'ellisse che si completerebbe maggiormente all'interno della Terra e avente sempre un fuoco in coincidenza con il centro terrestre.



L_1 e L_2 sono il punto di lancio e quello di destinazione
H e h_0 sono le altezze massime sul suolo terrestre
F è un fuoco dell'ellisse (il centro terrestre)

Il caso dell'orbita circolare, rappresentato nell'immagine a lato, è ancora più interessante: si vede il lancio di un satellite artificiale su un'orbita di parcheggio ellittica *E*. L'ingresso in tale orbita è nel punto P_1 che corrisponde, semanticamente, alla sommità del monte rappresentato nell'immagine di pagina 70. Poi, mediante l'accensione impulsiva di un razzo propellente nel punto P_2, il satellite artificiale si immette in un'orbita pressoché circolare. ❖



Immissione di un satellite artificiale in un'orbita geostazionaria circolare Dicesi geostazionaria un'orbita di un satellite artificiale giacente nel piano equatoriale terrestre, il cui periodo è uguale al periodo di rotazione terrestre.

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

[1] F. M. Arouet Voltaire, *Opere*, Parigi 1827, tomo 41, p. 280.
[2] Plutarco, *Il volto della Luna*, Adelphi, Milano 1981.
[3] I. Newton, *Il sistema del mondo*, Bollati Boringhieri, Torino 1959. Fu pubblicato postumo nel 1731. Buona parte dei contenuti è incorporata nel III Libro dei *Principia*.
[4] I. Newton, *Principi matematici della Filosofia naturale*, a cura di A. Pala, UTET Torino 1965.
[5] J. Kepler, *Astronomia Nova*, Band III, herausgegeben von Max Caspar, C. H. Beck'sche Verlegsbuchhandlung, München 1937.
[6] D. T. Whiteside (a cura di), *The mathematical papers of I. Newton*, 8 VOLL., Cambridge University Press 1667-1687.
[7] I. Newton, *Méthodus fluxionum*, traduit par M. de Buffon, A. Blanchard, 1994.
[8] S. Chandrasekhar, *Newton's Principia for the common reader*, Oxford Clarendon Press 1995.
[9] M. Galuzzi, *L'influenza della geometria nell'evoluzione del pensiero di Newton*, in: *Geometria, flussioni e differenziali*, La città del sole, Napoli 1995.
[10] J. T. Cushing, *Kepler's laws and universal gravitation in Newton's Principia*, Am. J. Phys. 50 (7).
[11] V. Banfi, A. Busato, M. G. Busato, *Meccanica Spaziale*, Levrotto e Bella, Torino 2001.