LA MISURA TRA SCIENZE E MATEMATICA

alla secondaria di primo grado anche i sassi servono

*di Anna Manara**

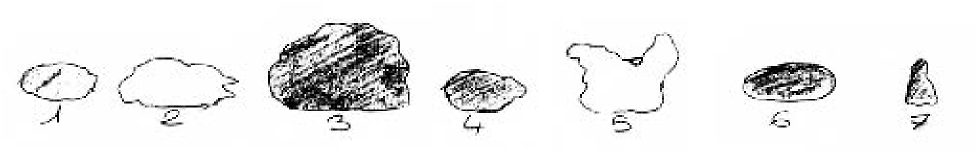
La misura, operazione al tempo stesso pratica e teorica, è fondamentale nell'insegnamento in quanto ponte significativo tra la matematica e le scienze sperimentali. Presenta una complessità concettuale che va con gradualità sviluppata dalla scuola primaria alla secondaria di secondo grado, ritornando in modo ricorsivo in relazione a contesti concettuali diversi. L'autore, attraverso un'attività sperimentale di misura semplice e adeguata all'età degli studenti, introduce concetti essenziali quali confronto, somma, equivalenza, sostituibilità, unità di misura e loro convenzionalità, multipli e sottomultipli: un percorso di apprendimento esemplare, raccontato attraverso le parole dei suoi stessi protagonisti, alunni (i nomi sono fittizi) e insegnante (in prima persona), con brevi commenti. L'esperienza è stata proposta in due classi prime di scuola secondaria di primo grado indicate con «prima C» e «prima D». Interessante il paragone tra le risposte diverse dei due gruppi e la diversa modalità con cui vengono raccontate le tappe del lavoro

*Insegnante di Matematica e Scienze nella Scuola Secondaria di primo grado "San Tommaso Moro" di Milano.

Entro in classe trainando un carrellino, normalmente carico di cose curiose. Oggi vi troneggia una fila di sassi, di varia forma e dimensione.
Il lavoro comincia con una attività di stima «a occhio» del sasso di massa maggiore: ognuno deve mettersi in gioco ed esprimere una valutazione della massa dei sassi, sotto forma di «votazione».
Si tiene conto di ogni valutazione e si formalizza attraverso una tabella. Il sasso «più votato» è quello giudicato in prima ipotesi di massa maggiore.

Il lavoro in prima C

Luca *La prof ha portato in classe 7 sassi di forme, colori e grandezze diverse.*



Allora ci siamo chiesti quale dei sassi aveva massa maggiore.
Abbiamo fatto una votazione e il sasso più votato è risultato il n. 5.

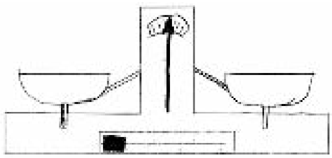
Paolo *La prof ha portato in classe 7 sassi di forma, grandezza, massa, peso e colore diversi.*
Dopo abbiamo fatto una rapida indagine chiedendoci quale tra i sassi avesse massa maggiore.
I votanti erano 18 e i risultati sono riportati nella tabella.

SASSI	n. 1	n. 2	n. 3	n. 4	n. 5	n. 6	n. 7
VOTI		XXX	XXXXXX		XXXXXXXX	X	

Come possiamo essere sicuri? Serve un criterio di decisione oggettivo.
Adesso confrontiamo la massa dei sassi utilizzando una bilancia a due piatti.

Luca *Ci siamo poi chiesti come potevamo controllare i risultati dell'indagine... con la bilancia a due piatti!!*
I risultati da quello di massa maggiore a quello di massa minore sono nell'ordine:
n. 6, n. 2, n. 1, n. 7; n. 4, n. 5.

Paolo *Per controllare i risultati dell'indagine, abbiamo preso una bilancia a due piatti: confrontando i sassi tra di loro, riusciremo a capire quale ha la massa maggiore.*
I risultati sono stati un po' diversi dalla maggior parte delle nostre aspettative.
Abbiamo confrontato la massa di tutti i sassi «uno contro l'altro». Ecco l'ordine d'arrivo da quello di massa maggiore a quello di massa minore.
n. 6, n. 2, n. 1, n. 3, n. 7, n. 4, n. 5
Con la bilancia a due piatti abbiamo visto che la nostra ipotesi (che cioè il n. 5 fosse quello di massa maggiore) era sbagliata.

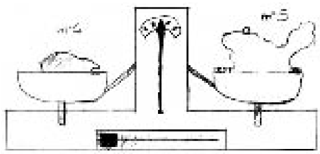


Dalla stima a occhio si è passati a una «misurazione», confrontando la massa dei sassi mediante uno strumento, la bilancia a due piatti: «i sassi uno contro l'altro». Il funzionamento della bilancia implica un'associazione abbastanza intuitiva tra la massa del corpo come quantità di materia e il suo peso come forza di attrazione da parte della Terra. Tuttavia evito in questa fase di affrontare la questione, restando correttamente coerente al confronto tra masse: in se-

guito ci sarà modo di approfondire e chiarire; sul piano linguistico uso solo il termine massa per non creare confusione di termini, che ingenera poi confusione concettuale tra massa e peso.
I risultati stupiscono (sono stati un po' diversi dalla maggior parte delle nostre aspettative; l'ipotesi di partenza era sbagliata); i fatti mettono alla prova le congetture, e si impongono. Non solo, aprono nuove domande.
È necessario introdurre una unità di misura, omogenea alla grandezza che si vuole misurare, a cui riferire ogni oggetto.

Luca

Successivamente ci siamo chiesti, di quanto un sasso ha massa maggiore degli altri? Per capirlo avevamo bisogno di masse campione, cioè oggetti tutti uguali e con la stessa massa.
La professoressa «per caso» ha portato 16 biglie di vetro e una di plastica.
Abbiamo confrontato la massa del sasso n. 6 con le 16 biglie: la bilancia non va in equilibrio, il sasso ha massa maggiore. Allora? Prendiamo il sasso di massa minore, cioè il n. 5. Abbiamo disegnato una tabella, dove abbiamo scritto il numero dei sassi e il numero delle biglie. Il sasso n. 5 equivale a 10 biglie di vetro. Poi mettiamo sulla bilancia il n. 4: equivale a 17 biglie di vetro più la biglia di plastica. Quindi si poteva fare anche così: il sasso n. 4 equivale al sasso n. 5 più 7 biglie di vetro più quella di plastica.
Poi é il turno del sasso n. 7: equivale al sasso n. 5 più 12 biglie di vetro, in tutto 22 biglie.
Passiamo al n. 3: equivale al sasso n. 5 più 15 biglie di vetro, in tutto 25 biglie.
Ora consideriamo il n. 1: equivale al n. 3 più 2 biglie di vetro e la biglia di plastica, in tutto 27 biglie più quella di plastica. Infine il n. 2: equivale al sasso n. 3 più 4 biglie di vetro, in tutto 29; e il n. 6 equivale al sasso numero 3 più 5 biglie di vetro, in tutto 30 biglie.
In questo modo, mettendo i sassi invece delle biglie, siamo riusciti a confrontare anche il sasso con massa maggiore.

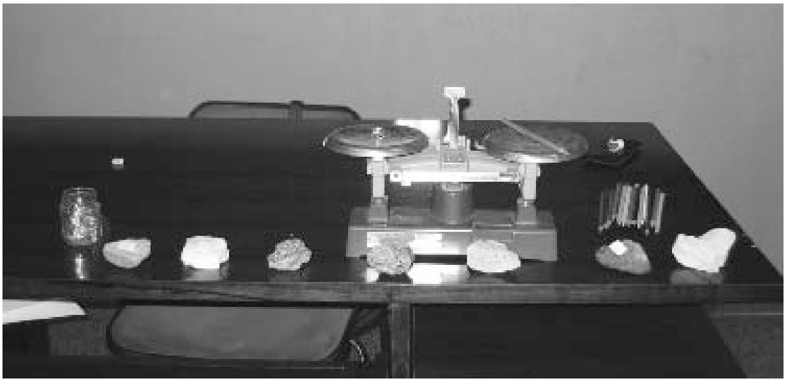


Paolo

Successivamente ci siamo chiesti: di quanto un sasso ha massa maggiore degli altri? Per capirlo avevamo bisogno di masse campione, per esempio oggetti tutti con la stessa massa. La lezione successiva abbiamo scelto 16 biglie di vetro. Così abbiamo confrontato il sasso n. 6, il più massiccio, ma la bilancia non era in equilibrio. Questo significa che il sasso aveva massa maggiore della massa delle biglie di vetro; allora abbiamo confrontato quello meno massiccio, la cui massa misurava 10 biglie. Per il sasso n. 4 (il secondo di massa minore) siccome non bastavano le 16 biglie ci siamo aiutati con il sasso n. 5, di cui conoscevamo la massa in biglie. Anche in altri casi abbiamo avuto bisogno dei sassi di cui prima si era misurata la massa. Ecco la tabella in cui la massa di ogni sasso è espressa in biglie di vetro (v)e di plastica (p). Alcune volte abbiamo usato una biglia di plastica (p), che aveva una massa minore di quella di vetro. Secondo me, però, alcuni di questi conti si potevano fare in un modo più veloce: per il n. 7, per esempio, invece di fare il n. 5 più 12 biglie di vetro si poteva usare il n. 4 più 5 biglie di vetro. Infatti ci si mette meno tempo a disporre sul piatto della bilancia 5 biglie piuttosto che 12.

SASSI	NUMERO delle BIGLIE
n. 5	10v
n. 4	n. 5 + 7v + 1p = 10v + 7v + 1p = 17v + 1p
n. 7	n. 5 + 12v = 10v + 12v = 22p
n. 3	n. 5 + 15v = 10v + 15v = 25v
n. 1	n. 3 + 2v + 1p = 25v + 2v + 1p = 27v + 1p
n. 2	n. 3 + 4v = 25v + 4v = 29v
n. 6	n. 3 + 5v = 25v + 5v = 30v

Il metodo si affina: sono proposte le biglie come «masse campione», perché le biglie sono oggetti di forma regolare e di massa uguale, ma tuttavia restiamo nella sfera del «gioco», non ancora dello «strumento scientifico».
La nuova osservazione comincia ancora sulla base di una congettura: cercando di misurare il sasso di massa maggiore, la risposta sarebbe potuta essere veloce; ma la necessità porta ad affinare ancora il metodo di ricerca: meglio misurare la massa dei sassi più piccoli, si possono ottenere nuovi campioni di massa.
Si fa strada con naturalezza la parola e l'idea di «equivalenza», rappresentata simbolicamente con l'uguale, ma ricondotta con semplicità all'idea della «sostituibilità»: se il sasso n. 5 ha una massa come quella di 10 biglie di vetro, lo usiamo sostituendolo a un pacchetto di 10 biglie di vetro.
Anche se non per tutti, è quasi spontaneo cercare una formalizzazione sia raccogliendo i dati in una tabella strutturata, sia adottando simboli che abbreviano e chiariscono; questo risulta evidente confrontando la prima relazione con la seconda.
Tutti, nel lavoro, si sono convinti che occorre riflettere criticamente su risultati, motivando oppure modificando la prima intuitiva ipotesi espressa.



Lo sviluppo del lavoro in prima D

Ancora più interessante è quanto è avvenuto, dopo la stessa proposta di lavoro, nella classe Prima D.
Si decide di quantificare i risultati. Emerge, dopo una discussione molto vivace, che occorre utilizzare una massa campione come unità di misura: io avevo le mie solite biglie di vetro, ma Sara aveva una scatola di 30 matite colorate nuove, e ha proposto di usare quelle; perché no? Ci siamo accertati che non fossero mai state utilizzate e abbiamo deciso di usarle: abbiamo anche concordato, dandolo per buono, che la matita nera non pesasse più della bianca e che il verde non fosse più denso del giallo, eccetera.
Avevamo tutto pronto, ma è suonata la campana; si può immaginare la

delusione, la mia innanzi tutto: ero troppo curiosa di fare il lavoro con le matite! Abbiamo raccomandato a Sara di non usare assolutamente le sue matite e di portarle la volta successiva.

Finalmente il giorno è arrivato: già nella discussione era emerso che conveniva incominciare dal sasso di massa minore, perché si correva il rischio di non avere matite in numero sufficiente.

Per il sasso n. 5, quello appunto di massa minore, mettiamo sul piatto della bilancia 11 matite, ma non bastano. Ne aggiungiamo una, è troppo. Che fare? Propongono di «spezzare» una matita, Sara impallidisce. La salvo, spiegando che andrebbe divisa in due parti uguali e che questo sarebbe molto difficile; qualcuno offre la sua matita, della stessa marca, ma un po' consumata. Siamo incerti. Alla fine proviamo a mettere un pezzo di gesso che é sulla cattedra: i piatti vanno in equilibrio. Il sasso n. 5 corrisponde dunque a 11 matite di Sara (mS) e 1 gessetto bianco per eccellenza (gbxe); l'abbiamo distinto dagli altri gessetti bianchi, che stavano sulla cattedra e che erano diversi, chiamandolo «per eccellenza» (i ragazzi hanno controllato che non lo usassi più per scrivere alla lavagna).

Il sasso successivo corrispondeva a un numero intero di matite. Per il n. 3 abbiamo usato il gessetto. Per quello successivo le matite non bastavano: è stato proposto di usare il sasso n. 5, ma qualcuno ha suggerito che era più comodo usare un sasso di massa più vicina a quello in esame, perché avremmo dovuto aggiungere meno matite.

Quando abbiamo confrontato il sasso n. 4 con il sasso n. 3, abbiamo aggiunto due matite e il gessetto, quindi il n. 4 risultava avere massa pari a un *tot* di matite + due gessetti, di cui uno compreso nella valutazione del sasso precedente e uno aggiunto. A questo punto un ragazzo ha domandato: «ma due gessetti hanno massa maggiore o minore di una matita?».

É un problema, perché di gessetti bianchi per eccellenza ne abbiamo uno solo. Qualcuno propone: rimettiamo sulla bilancia il sasso n. 5, che corrisponde a 11mS e 1gbxe, spostiamo il gessetto dalla parte del sasso, quindi è come se lì ce ne fossero due; aggiungiamo una matita dall'altra parte e vediamo se il piatto scende o no: se scende la matita ha massa maggiore di quella di due gessetti, se sale no.

Tutti i ragazzi capiscono la proposta e la eseguono; per chiarirla meglio scrivo i passaggi sulla lavagna.
Dove c'era scritto:
n.5 → 11ms+1gbxe
scrivo, sostituendo:
11ms+1gbxe → 11ms+1gbxe;
poi, per evidenziare lo spostamento:
11ms+ 2gbxe → 11ms+……
A questo punto una ragazza ha fatto notare che allora i termini 11ms da entrambe le parti si equivalevano, quindi era come se fossero «uguali a zero»: bastava ragionare sull'equilibrio dei 2gbxe.
Non tutti hanno capito, ma qualcuno si è illuminato.
Procedendo, mettiamo la matita sul piatto di destra, e la bilancia va in equilibrio: fantastico! Allora possiamo anche dire che…..
Arrivano tutti a dire che il gessetto equivale sicuramente a metà matita.
Finiamo il lavoro con questo nuovo dato; alla fine trasformiamo tutti i valori usando come unità di misura le «matite», sostituendo ai sassi il loro valore in matite, anche con i decimali.
Qualcuno ha chiamato questo ultimo passaggio «equivalenza»: ho lasciato cadere la cosa, perché non volevo che ci si bloccasse sui termini.
La volta prossima lavoreremo in «biglie».
É abbastanza emozionante assistere a una conquista così «galoppante» di linguaggio e simbolismo.
L'attività suggerisce la ricerca di strumenti espressivi, che, usati liberamente e non rigidamente, contribuiscono all'affacciarsi di concetti come l'equivalenza; addirittura è sulla soglia l'idea di equazione, con l'intuizione del primo principio: possiamo sottrarre a entrambi i membri di un'equazione termini tra loro uguali.

Stiamo parlando di concetti che sono presentati troppo spesso in modo così formale e astratto, da essere considerati difficili, mentre è chiara la loro giustificazione agli occhi di ragazzini di prima media che lavorano in questo modo.

Osservazioni conclusive

Non é difficile rendersi conto di come questa esperienza, cominciata come un laboratorio di scienze, sia anche un efficace laboratorio di matematica. Ecco in sintesi le tappe.

➔ Partendo da semplici oggetti solidi che si incontrano nella realtà quotidiana (non idealizzati dalla geometria) si svolge un lavoro di avvicinamento all'operazione e al concetto di misura: si prende come unità di misura una grandezza omogenea a quella da misurare, scelta convenzionalmente con gli allievi.

➔ Si fa un'operazione di confronto secondo un procedimento basato sull'equilibrio della bilancia a due piatti e si decide quante masse campione eguagliano la massa da misurare.

➔ Se non si ottiene un risultato espresso da un numero intero di masse campione, si cercano opportuni multipli e sottomultipli dell'unità di misura (il sasso n. 5 piuttosto che il sasso n. 7), e si sostanzia il lavoro sulle equivalenze.

➔ Si prepara il terreno in modo esemplare all'idea di equazione (uguaglianza di due termini, tra i quali posso operare in modi precisi, per esempio, sostituendo a 17 biglie il solo sasso n. 5 o viceversa, al sasso n. 5, 17 biglie).

➔ In un contesto assolutamente di senso «comune», si arriva all'adozione spontanea, ma pienamente consapevole, di simbolismi adeguati: l'uso di tabelle strutturate per raccogliere i dati; l'indicazione della biglia di vetro con il simbolo v, quella di plastica con p; questi simboli sono usati correttamente nel calcolo con tranquilla certezza del loro significato.

➔ La fase conclusiva, da non trascurare, è la fase di «resoconto narrativo» quando chiedo agli allievi di raccontare *per filo e per segno*. Questo è il momento della personalizzazione; i ragazzi non ripercorrono tutti nello stesso modo e con la stessa consapevolezza i passi compiuti; nel racconto alcuni sono in grado di anche la loro sorpresa o il loro sconcerto, o anche, magari in modo implicito, quanto hanno personalmente scoperto; altri formulano resoconti più stringati e distaccati, non perdendo però l'essenziale di quanto è avvenuto in classe. Particolarmente interessante è come essi spontaneamente usino quasi sempre, insieme alle parole, il linguaggio grafico: si individuano così facilmente quelli che fanno uno schizzo sintetico della situazione, entro cui interessano le relazioni tra gli oggetti (sono introdotti anche simboli come + e - per mostrare la situazione dei piatti della bilancia), e quelli che ne fanno un ulteriore elemento narrativo/illustrativo, che rivela un livello più intenso della partecipazione a ciò che in classe è avvenuto.

Per concludere mi sembra di poter ritenere che questo tipo di lavoro rappresenti un buon esempio di reinvenzione guidata. ❖

Per un approfondimento teorico si veda:

A. P. Longo, *La misura, osservazioni, commenti, proposte*, in: *Emmeciquadro* n. 8 (aprile 2000) e n. 9 (agosto 2000).