

FARE MATEMATICA ALLA PRIMARIA

le trasformazioni nella struttura additiva

di Lucia Radaelli*

L'esperienza dell'insegnante Lucia Radaelli, è la traduzione in classe di una lezione teorica sui problemi della struttura additiva, riportata in un articolo di questa rivista [Longo, 2008]. Si tratta di un nodo tematico relativo al percorso della classe seconda della scuola primaria. La lezione sottolineava come una molteplicità di problemi, che implicano rappresentazioni mentali molto diverse tra loro, si possano tutti risolvere con una semplice addizione. Infatti esiste una pluralità di significati per le operazioni di somma e sottrazione, e la difficoltà di un problema non è determinata tanto dall'operazione, quanto dalla rappresentazione mentale che i bambini devono produrre per riconoscere il procedimento di risoluzione. I problemi matematici della tipologia «trasformazione» riguardano situazioni di cambiamento legate ai numeri. L'idea generale di trasformazione riguarda però la descrizione dei cambiamenti che avvengono nel tempo in seguito all'intervento di un particolare agente, interno o esterno. La descrizione codificata è la sequenza «primo stato - trasformazione - secondo stato». Quelli descritti sono i primi passi in una classe dentro l'argomento, che andrà poi ripreso e ampliato, anche in collegamento con lo studio delle scienze. L'articolo mostra come un contenuto teorico è trasferito in classe attraverso la mediazione didattica dell'insegnante, consapevole dei passi necessari a un bambino di scuola primaria per arrivare a dare senso a una formalizzazione matematica. Inizia facendo emergere il contenuto concettuale dall'osservazione di semplici esperienze della vita quotidiana; dopo che i bambini hanno «osservato» la presenza di una invarianza, introduce come rappresentazione lo schema «stato - trasformazione - stato» senza allontanarsi completamente dal linguaggio quotidiano; attraverso il dialogo fa in modo che sia significativo per i bambini quantificare sia gli stati sia la trasformazione con i numeri. Distingue poi le trasformazioni di crescita e di diminuzione associando un segno (+ oppure -) al numero che individua quantitativamente la trasformazione. Questa è una buona esperienza per iniziare a incontrare numeri associati a un segno, senza però spingersi oltre. Guida infine a identificare due categorie di trasformazioni: quelle reversibili e quelle irreversibili. I problemi accompagnano tutto lo svolgimento dell'attività didattica.

(Anna Paola Longo)

*Docente presso la Scuola Primaria "Tikwa-Amal" di Zibido San Giacomo (Mi).

Prime osservazioni, rappresentazione mediante tabella

9 Marzo 2009
prima tappa

Ho introdotto l'argomento, esaminando con i bambini in giorni successivi parecchi esempi di situazioni concrete in cui si svolge un cambiamento attraverso un'azione: *com'è adesso la porta?* – ho chiesto per esempio alla classe – *aperta* – mi hanno risposto in coro i bambini; poi, dopo averla chiusa, ho chiesto di nuovo: *e adesso?* Naturalmente mi hanno risposto: *chiusa! Perché, che cosa è successo? L'hai chiusa* – rispondono; ho continuato così diverse volte: ho aperto e chiuso la finestra, sono uscita ed entrata dall'aula, ho scritto alla lavagna e poi ho cancellato, eccetera.

Abbiamo ripensato alle situazioni già viste, abbiamo fatto altre prove, poi ho chiesto ai bambini se tutte quelle situazioni avessero qualcosa in comune. Dopo aver riflettuto insieme (sono cose diverse, c'è un cambiamento, prima era in un modo adesso è diverso) abbiamo concluso che la caratteristica comune è il «cambiamento» e abbiamo cercato di dare un nome ai vari momenti. È stato facile individuare un «inizio» e una «fine», più complicato capire che nome dare a quello che succedeva tra l'inizio e la fine e che provocava il cambiamento; poi abbiamo scelto la parola «azione». Solo a questo punto ho introdotto il nome di «trasformazione» e sul quaderno abbiamo registrato in una tabella le trasformazioni individuate insieme. Poi ogni bambino ne ha scritte altre autonomamente.

LE TRASFORMAZIONI

INIZIO	AZIONE	FINE
Astuccio aperto	Chiudere	Astuccio chiuso
Lunedì	Aspettare un giorno	Martedì
Foglio strappato	Incollare	Foglio attaccato
Pezzo di legno intero	Tagliare	Legno a metà
Gatto piccolo	Crescere	Gatto grande
Maglione allacciato	Slacciare	Maglione slacciato

Il passaggio da lunedì a martedì ha suscitato una interessante discussione, prima di arrivare a dire che per realizzarlo bisogna aspettare un giorno. Infatti la bambina che lo aveva suggerito, non riusciva a individuare un'azione, ma solo l'inizio (lunedì) e la fine (martedì) e, per aiutarla a riconoscere il trascorrere del tempo, qualcuno diceva: *bisogna mangiare, studiare, giocare...*, qualcun altro diceva: *bisogna dormire e poi è martedì*, oppure: *bisogna aspettare* (e io per aiutarli a riconoscere che deve trascorrere un tempo fisso, dicevo: *adesso aspetto un pò, arriva martedì?*), ancora: *deve arrivare mezzanotte, eccetera*. Finché un bambino ha detto che bisogna «aspettare un giorno» e tutti si sono convinti, accettando questa formulazione. L'esempio è molto complesso; negli altri casi l'azione è compiuta da un soggetto facilmente riconoscibile, mentre in questo caso i bambini non riescono a identificarlo; infatti con il verbo «aspettare» riportano l'azione a se stessi, in quanto osservatori. Ma non mi sembrava il caso di censurare un esempio perché complesso, anzi ho cercato di trasformarlo in una occasione di osservazione e descrizione di un evento naturale, primo passo di un'osservazione scientifica.

La descrizione, un primo esercizio

Ho fatto rileggere le trasformazioni scritte sul quaderno, poi abbiamo cercato di analizzarle per riconoscerne alcune caratteristiche. Durante la lezione dialogata ho appuntato le osservazioni dei bambini, le ho fotocopiate per incollarle sul quaderno di ciascuno.

11 Marzo 2009
seconda tappa

OSSERVAZIONI

Le trasformazioni si possono «fare» davvero (per esempio: maglione allacciato/slacciare/maglione slacciato).

Ci sono tante trasformazioni diverse.

Ci sono diversi momenti in una trasformazione: inizio/azione/fine.

Ogni trasformazione ha un protagonista (per esempio il gatto che cresce).

Scrivi l'inizio, poi, se trovi l'azione giusta, è facile trovare la fine.

Ci sono trasformazioni naturali e artificiali (per esempio: astuccio aperto/astuccio chiuso è artificiale perché la fa un bambino, il gatto che cresce è una trasformazione naturale).

L'inizio deve andare bene con l'azione e con la fine.

Per passare dall'inizio alla fine qualcuno deve fare qualcosa (per esempio l'astuccio aperto se lo lasci così rimane aperto, qualcuno deve chiuderlo).

Ogni azione ha il suo momento (per esempio: il gatto è piccolo, ha il suo momento, non può diventare subito grande).

Alla fine, perché venga esplicitato meglio che il cambiamento avviene nel tempo, ho chiesto: *che cosa deve succedere?* E i bambini hanno risposto: *deve aspettare, deve mangiare..., deve passare del tempo.*

Per concludere, ho fatto preparare una tabella sul quaderno, ho dato un solo elemento per ogni trasformazione chiedendo di completare il quadro. Solo pochissimi hanno avuto incertezze, nessuno è rimasto disorientato di fronte alla richiesta.

COMPLETA LE TRASFORMAZIONI

INIZIO	AZIONE	FINE
Bicchiere pieno		
Foglio intero		
Armadio chiuso		
	Crescere	
	Consumare	
	Chiudere	
		Bambino in piedi
		Banana sbucciata
		Camicia sporca

Le trasformazioni reversibili e irreversibili

Ho chiesto ai bambini di rileggere da soli tutte le trasformazioni scritte nei giorni precedenti e di osservare, indipendentemente dagli oggetti e dalle azioni considerati di volta in volta, se ci sono somiglianze o differenze. La prima a rompere il ghiaccio è Gaia, una bambina che, pur con qualche difficoltà di comprensione, si impegna molto. Individua in modo intuitivo una rassomi-

12 Marzo 2009
terza tappa

glianza tra queste tre trasformazioni: foglio intero/strappare/foglio strappato, penna nuova/consumare/penna consumata, banana intera/sbucciare/banana sbucciata, senza riuscire però a spiegare che cosa abbiano in comune. Propongo di ragionare insieme.

Alessandro dice che strappare un foglio è come «consumare», perché dopo non lo si può più usare;

Matteo dice che se sbucci una banana e poi non la mangi, la consumi lo stesso, perché non si conserva e anche la penna, se la usi tanto, si consuma.

Micaela mette insieme le trasformazioni con il verbo «crescere» (gatto piccolo/crescere/gatto grande; bambino piccolo/crescere/bambino grande; dentino piccolo/crescere/dente grande).

Francesca vuole mettere insieme a queste trasformazioni anche: bambino seduto/alzarsi/bambino in piedi, perché lei quando è seduta è più bassa e quando si alza è più alta, quindi secondo lei «alzarsi» è come «crescere».

Capisco che siamo arrivati a un punto interessante e per questo chiedo a Francesca di provare: la faccio sedere e alzare più volte da uno sgabello e ogni volta diciamo tutti insieme la trasformazione:

Francesca seduta/alzarsi/Francesca in piedi

Francesca in piedi/sedersi/Francesca seduta.

Infine, per arrivare al punto che mi interessa, le chiedo se può fare *Francesca a due anni*: lei si mette a gattoni, ma è chiaro a tutti che può solo far finta di essere più piccola, non può tornare a quando aveva due anni davvero. Quindi i due verbi «alzarsi» e «crescere» non sono davvero imparentati, anche se c'è una somiglianza esteriore: per l'azione di alzarsi esiste l'azione di sedersi che fa tornare nella posizione iniziale, invece per l'azione di crescere non esiste un'azione che faccia tornare allo stato iniziale.

I bambini sono così arrivati ad accorgersi tutti che abbiamo fissato l'attenzione su due tipi di trasformazioni: quelle in cui «si può tornare indietro» e quelle in cui non si può; impariamo a chiamarle reversibili e irreversibili.

Dopo questa conclusione tutti i bambini riguardano le trasformazioni scritte e cercano di distinguere quelle di un tipo e quelle dell'altro.

Sul quaderno registriamo quanto abbiamo imparato, come nell'immagine a lato.



Le trasformazioni con i numeri

16 Marzo 2009
quarta tappa

Ho chiesto ai bambini come mai il lavoro sulle trasformazioni fosse stato fatto con me e non con la maestra di italiano, e perché proprio sul quaderno di matematica, visto che abbiamo esaminato azioni che sono espresse da verbi e che non compaiono numeri. Qualcuno mi ha detto che in realtà avevano

già fatto qualcosa di simile sul quaderno di storia, perché avevano visto cosa succede col passare del tempo (c'è un prima e c'è un dopo). Qualcuno ha detto che si vede che le trasformazioni si possono fare anche con i «numeri» e qualcuno ha osservato che «le operazioni fanno la trasformazione». Trasferisco a tutta la classe il contenuto di queste osservazioni facendo insieme alcuni esempi. Dopo aver fatto alcune trasformazioni (numeriche) alla lavagna (ed è stato subito chiaro che per tornare indietro se ho fatto un'addizione farò una sottrazione e viceversa), sul quaderno abbiamo fatto la registrazione seguente. Come esercizio ognuno è stato invitato a inventare delle trasformazioni secondo lo schema seguente.

Se dal numero 12 vogliamo arrivare al numero 19 dobbiamo aggiungere 7



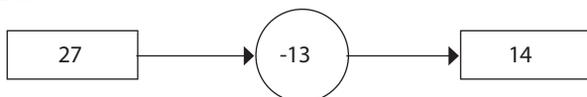
+7 è l'operatore che ci fa passare da 12 a 19
 + dice che dobbiamo aggiungere
 7 dice quanto dobbiamo aggiungere

Dalla trasformazione al problema

Ho scritto alla lavagna quattro trasformazioni numeriche. Affinché i bambini scoprano che una trasformazione può «raccontare» una storia, ho chiesto loro di sceglierne una ciascuno e di provare a costruire il testo di un problema, da risolvere poi come di consueto.

24 Marzo 2009
 quinta tappa

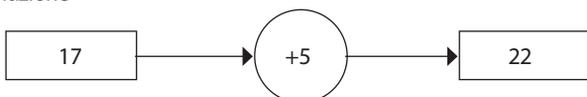
Prima trasformazione



Problemi

Pippi Calzelunghes ha comprato 27 calze, ma gliene cadono 13. Quante gliene rimangono?
 Mio zio ha 27 cani, gliene scappano 13. Quanti cani rimangono?

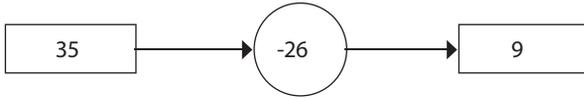
Seconda trasformazione



Problemi

Ieri Carola aveva 17 bottiglie. La sua amica gliene regala 5. Quante bottiglie ha adesso?
 Francesca ha 17 tappi, ne trova 5. Quanti sono adesso?
 Michele aveva un gatto di 17 anni. Sono passati 5 anni. Quanti anni ha adesso il gatto di Michele?
 Marta ha 17 flocchi e ne compra altri 5. Quanti flocchi ha adesso Marta?

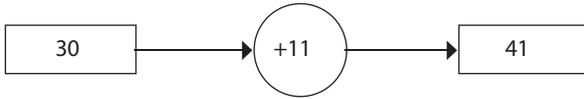
Terza trasformazione



Problema

Un papà aveva tanta fame, una notte nel frigorifero c'erano 35 salsicce. Ne mangia 26. Quante salsicce rimangono?

Quarta trasformazione



Problema

In un orto un signore di nome Franco raccolse 30 carote e le mise in un sacchetto, poi gli sembrarono poche e ne raccolse ancora 11. Con quante carote tornò a casa?

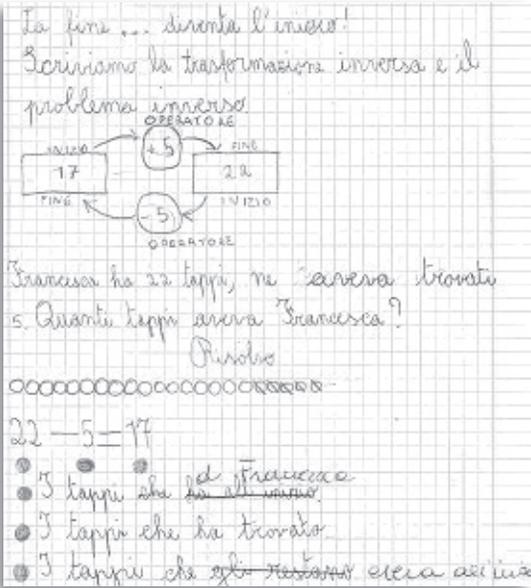
**La fine... diventa l'inizio:
la trasformazione inversa e il problema inverso**

25 Marzo 2009
sesta tappa

Ho fatto scrivere sul quaderno a ciascun bambino la trasformazione che aveva scelto per inventare il problema e la sua inversa, cioè la stessa trasformazione, in cui compare sia il percorso dall'inizio alla fine, sia quello dalla fine all'inizio, che avviene utilizzando l'operatore inverso. Avevamo già osservato che questo è sempre possibile con i numeri. Ho chiesto di scrivere il testo del problema partendo dalla fine: conosciamo cioè come è finita la storia; sapendo

che cos'è successo, vogliamo risalire all'inizio. Un bambino scrive il problema inverso scegliendone uno tra quelli relativi alla seconda trasformazione: Francesca ha 17 tappi, ne trova 5. Quanti sono adesso i tappi?

Per il momento ho chiesto ai bambini di risolvere i problemi inventati seguendo lo schema solitamente in uso nella nostra classe: rappresentazione grafica (personale), operazione, legenda a pallini colorati per esplicitare il significato dei numeri utilizzati. La presenza dei pallini colorati perciò non è legata alla trasformazione, ma è una simbologia a cui ormai i bambini della classe sono abituati per esprimere, attraverso la legenda, la natura dei numeri che stanno usando, cioè a che cosa si riferiscono. Questo li aiuta a riflettere sul procedimento usato e li prepara a un tipo di ricerca che sarà davvero essenziale nei problemi su moltiplicazione e divisione. Mi propongo di far notare in seguito come la nuova rappresentazio-



ne (lo schema di trasformazione) sia ugualmente funzionale alla risoluzione e possa sostituire la legenda e la rappresentazione personale finora utilizzata. Lo scopo immediato, infatti, non è quello di addestrare i bambini a utilizzare una rappresentazione piuttosto che un'altra, ma di fornire una serie di strumenti in grado di illustrare i processi mentali che, magari inconsciamente, hanno utilizzato per affrontare il compito richiesto. Saranno poi loro stessi a scegliere di volta in volta gli schemi più familiari, finché non riusciranno a diventare padroni di tutti gli strumenti. Il problema sopra illustrato rappresenta proprio ciò che io chiedevo, un passaggio a ritroso, cioè tornare dallo stato finale a quello iniziale senza cambiare la situazione, individuando il percorso tra numeri per ricostruire lo stato iniziale della trasformazione. Molti bambini, rifacendosi all'esperienza delle azioni contrarie su cui si era lavorato a lungo in precedenza, volevano rispondere alla mia richiesta cambiando l'azione che avevano associato all'operatore. Per esempio, chi nel problema aveva fatto perdere qualcosa al protagonista, identificava la trasformazione inversa dicendo «ricompra» oppure «gli regalano». In questa fase non volevo allargare troppo il campo per evitare confusione su un punto delicato, ma questo aspetto sarà da riprendere perché questo approccio non era un errore in sé, ma una questione un po' diversa da quella su cui avevo focalizzato l'attenzione di tutti. Effettivamente non si tratta di un errore perché se l'azione fosse salire (per esempio: dal piano terra ho salito 3 gradini), per tornare effettivamente allo stato iniziale dovrei scendere quei 3 gradini: salire e scendere sono trasformazioni (azioni) opposte. Ma scendendo i 3 gradini, non tornerei allo stato temporale dell'inizio della prima trasformazione (cioè al tempo iniziale), ma a un terzo stato finale (piano terra) identico a quello iniziale. Qui si nota una differenza tra le azioni reali, sempre legate al tempo, e lo schema matematico, che può prescindere dal tempo. Lo schema astratto, stato – trasformazione – stato, permette di rappresentare entrambe le interpretazioni.

Scopriamo l'operatore

Ho fatto riprendere il lavoro fatto finora, chiedendo in particolare ad alcuni bambini di rileggere il testo dei problemi inventati a partire dalla trasformazione che avevano scelto. Tutti avevano posto la domanda su uno dei due stati e per questo ho chiesto di scrivere il testo dell'ultimo tipo di problema legato alla medesima trasformazione, quello in cui l'elemento da trovare è l'operatore. Molti bambini hanno avuto bisogno di aiuto e solo una bambina ha cercato l'operatore facendo la differenza tra i due stati, gli altri hanno semplicemente riscritto la trasformazione così com'era. Per esempio, Gaia, che aveva inventato il problema del gatto, scrive correttamente:

Il gatto di Michele prima aveva 17 anni, adesso ne ha 22. Quanti anni sono passati?

Però risolve il problema con l'addizione, dopo aver calcolato a mente la differenza tra 22 e 17: $17 + 5 = 22$

6 Aprile 2009

fine

Francesca invece, unica nella classe, scrive così:

Marta aveva 17 flocchi. Oggi ne ha 22. Quanti flocchi ha comprato Marta?

E risolve con una sottrazione:

$$22 - 17 = 5$$

Molto probabilmente per Gaia, che scrive una somma invece della sottrazione, non si tratta della mancanza di comprensione dello schema della trasformazione, ma di una imperizia nel calcolo e di conseguenza nella espressione formale. Gaia ha calcolato a mente il valore della trasformazione (5), ma, come Gerard Vergnaud [1994, p.134] fa notare, è molto frequente che i bambini, per la difficoltà di gestire il riporto, sostituiscano alla sottrazione (in questo caso $22 - 17 = ?$) una addizione incompleta ($17 + ? = 22$).

L'argomento andrà ripreso, rivedendo più volte i vari passaggi, non si può pensare che i bambini possano già aver raggiunto una buona padronanza di una struttura così complessa. Di volta in volta si potrà proporre come incognita uno degli elementi della trasformazione e chiedere di costruire il problema corrispondente, oppure, a partire da un testo dato, chiedere di scrivere la trasformazione che lo risolve. Nella mia esperienza ho potuto verificare come questo tipo di rappresentazione sia utile anche per far comprendere il legame tra moltiplicazione e divisione e, poiché aiuta molto a ricostruire percorsi mentali a partire dallo stato finale o dall'operatore, risulta particolarmente efficace quando, in geometria, si affrontano le formule inverse.

Non solo matematica

A margine del lavoro svolto in matematica, con la collega di italiano abbiamo proposto un lavoro di riflessione sui termini utilizzati nelle trasformazioni e abbiamo preparato questo cartellone, che i bambini hanno riempito con le parole adatte, riprese da tutti gli esempi fatti.

OGGETTI (NOMI)	QUALITÀ (AGGETTIVI)	AZIONI (VERBI)
Banana, maglione, gatto, bambino, porta, astuccio...	Nuovo, piccolo, aperto, strappato, pulito...	Crescere, sbucciare, chiudere, consumare, tagliare...

Anche questa è solo una piccola attività, adatta all'età dei bambini, ma sarà possibile ampliarla e approfondirla, anche negli anni successivi; si tratta di un esempio di come si possa non considerare come isolato e indipendente ogni argomento che si può incontrare nelle diverse discipline. ❖

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

- Davoli Adriana, 2006, *Programmazione in II elementare*, in: P. Ellerani P. e I. Fiorin, *Una scuola che progetta*, Armando, Roma.
- Longo Anna Paola, Barbieri Stefania, 2008, *Insegnare matematica. Esempi di buone prassi in Lombardia*, Guerini e associati, Milano.
- Longo Anna Paola, 2008, *Immagini mentali e rappresentazioni nella struttura additiva*, in: *Emmeciquadro*, n.34, dicembre 2008, pp. 33 - 41.
- Vergnaud Gerard, 1994, *Il bambino, la matematica, la realtà*, Armando, Roma.