PERIMETRO E AREA DI FIGURE PIANE

linee didattiche per la scuola primaria

di Anna Paola Longo

Nella scuola primaria è opportuno porre il fondamento concettuale di nozioni che successivamente verranno ampliate e approfondite. L'attenzione non è quindi da concentrare solamente sulle formule e sul loro uso, ma soprattutto sulle strategie di confronto, nel grande contesto della misura. L'autore mostra la possibilità di lavorare sulla ricchezza geometrica dell'argomento, perché non venga ridotto a semplice pretesto per risolvere problemi con somme e moltiplicazioni. L'approccio proposto, con esemplificazioni per la scuola primaria, può essere efficacemente esteso alla secondaria di primo grado, con scelte di contenuto adeguate al contesto culturale e concettuale proprio di questo livello scolare.

Nella scuola primaria, prima di affrontare area e perimetro, bisogna che i bambini abbiano chiare le idee di base sulla misura e sulle classi di «grandezze omogenee», che richiamo sinteticamente. Grandezza è una qualità misurabile di una classe di oggetti reali. I bambini sono introdotti a riconoscere le grandezze facendo esperienze: per esempio si rendono conto che di un pacco di zucchero si può misurare sia il peso che il volume o che di una persona si può misurare l'altezza, il giro vita, il peso, eccetera.
Due grandezze si dicono omogenee se sono confrontabili: per esempio, per le lunghezze si può stabilire se un filo è più lungo di un bastone, per i pesi se un sacco è più leggero di un altro.
I modi concreti per eseguire il confronto (e di conseguenza stabilire l'ordine) sono caratteristici per ciascuna classe di grandezze.
L'ordine è una proprietà indispensabile per parlare di misura e presuppone il possesso di un criterio per confrontare due grandezze di una stessa classe.
Fin dai primi anni di scuola quando si ordinano collezioni di oggetti occorre un lavoro per fare emergere le avvertenze da rispettare in ciascuna classe e le diverse modalità di confronto [Radaelli, 2008].

Separare e chiarire i concetti

I bambini confondono spesso perimetro e area di una figura piana, o perché li identificano entrambi con un numero senza riconoscere la peculiarità della grandezza a cui il numero si riferisce, oppure perché non riescono a riconoscere (e distinguere) in modo immediato, intuitivo, il significato dei due termini (quindi hanno delle idee, ma non sanno bene come nominarle e si confondono).[1] Il primo passo per affrontare l'argomento è senz'altro «separare mentalmente perimetro e area», a partire dalle esperienze di movimento e di descrizione dello spazio in cui si identificano le regioni con una, due, tre dimensioni. Ci si deve assicurare che gli allievi pensino a triangolo, quadrato, eccetera come a una regione del piano e non solo come alla linea di contorno. A queste regioni si applicherà poi in modi diversi il concetto di misura.
Occorre qui ricordare che le prime idee di geometria si formano attraverso esperienze, giochi, movimenti del corpo che generano rappresentazioni mentali, le quali poi si fanno emergere al livello esplicito, evitando, per quanto è possibile, definizioni verbali. Specifichiamo ora i termini.

[1] Per approfondire questo punto, si possono consultare gli articoli di F. Jaquet segnalati in bibliografia [Jaquet, 2000a; Jaquet, 2000b].

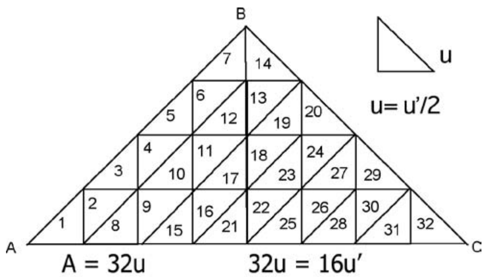
Perimetro

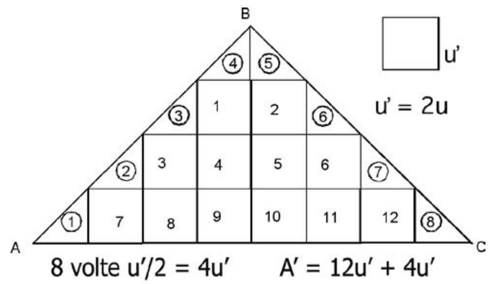
Perimetro significa letteralmente «misura intorno», cioè misura del contorno di una figura piana; il contorno per esempio di un poligono è una «linea spezzata chiusa». Per interiorizzare la sua immagine è conveniente camminarci sopra se la si visualizza come recinto di una aiuola, seguirla con un dito se il poligono è disegnato, immaginare un insetto che percorre il bordo, risolvere un numero adeguato di problemi che riguardano la misura di un contorno, prima che la parola perimetro sia nominata.
In conclusione, il perimetro di una figura piana è la lunghezza del suo contorno, somma delle lunghezze dei vari tratti che lo compongono. Sarà facile se si sa misurare una lunghezza.
Per familiarizzare con le lunghezze e le distanze si può iniziare a misurare il cammino fatto per andare da casa a scuola, notando come è fatta questa linea spezzata, rappresentandola graficamente, ricercandola su una piantina, eccetera; misurare la distanza su un qualsiasi percorso reale o disegnato, per poi passare alla misura di una linea chiusa. Queste osservazioni possono iniziare fin dalla prima mentre si eseguono i percorsi. In esperienze di questo tipo sarà opportuno introdurre e fissare il concetto di «scala», che successivamente sarà utilizzato più volte in geometria.

Area

Area è la misura dell'estensione di una superficie e precisamente il rapporto tra l'estensione della figura data e quella di un'altra, scelta convenzionalmente come unità di misura. Il processo della misurazione dell'area non è banale, soprattutto «non può essere effettuato sempre nello stesso

modo», cioè con un confronto diretto, come vedremo di seguito.
L'unità convenzionale è il metro quadrato, ma è meglio iniziare l'attività utilizzando unità libere (misurare l'area di un pavimento fatto di piastrelle uguali, anche non quadrate, rispetto a una piastrella; misurare l'area della copertina di un libro ricoprendolo di rettangoli o di triangoli equilateri, provare poi se è possibile con triangoli di altra forma). È opportuno utilizzare unità di misura diverse su una stessa figura e individuarne il rapporto. Di seguito un esempio.



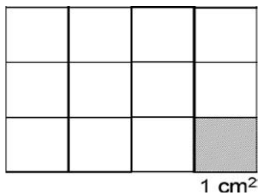


Nella prima figura **ABC** è un triangolo rettangolo (l'angolo in **B** è retto), isoscele (**AB = BC**); anche l'unità u è un triangolo rettangolo isoscele. Si noti che i 32 triangoli contenuti in **ABC** sono congruenti perché sovrapponibili attraverso simmetrie e traslazioni.
Nella seconda figura il triangolo **ABC** è lo stesso, ma lo si misura rispetto al quadrato **u'**. La figura contiene 12 volte **u'**, ma dobbiamo anche valutare la misura, rispetto al quadrato **u'**, degli 8 triangoli posti al bordo; essa si può ottenere tenendo presente che ogni triangolo è metà del quadrato.
Poiché $u' = 2u$, l'area dei triangoli del bordo è: $8(u'/2) = 4u'$; quindi l'area A del triangolo rispetto all'unità u' è: $A = 12u' + 4u' = 16u'$.
In questo procedimento si è utilizzata più volte la proprietà additiva, proprietà comune a tutte le misure, qualsiasi sia la classe di grandezze considerate.[2]
Si osserva infine che il rapporto tra le due unità **u** (triangolo) e **u'** (quadrato) è collegato con il rapporto tra le due misure:
se $u' = 2u$ allora $A' = (1/2)\ A$
il rapporto cioè tra le misure dell'area è il reciproco del rapporto tra le unità. Attraverso altri esempi, anche su classi diverse di grandezze, si arriverà a generalizzare la relazione:
se $u' = ku$ allora $A' = (1/k)\ A$

[2] Abbiamo riportato sui due triangoli il quadrato e il triangolo scelti come unità, operando tra l'unità e la figura ABC un confronto diretto (sovrapponendo figure in carta, oppure rappresentando graficamente l'operazione reale). Nel caso della seconda figura, per ricoprire il triangolo si utilizzano, oltre all'unità (quadrato), anche una sua frazione (triangolo) e si fa poi una valutazione globale.

Area di un rettangolo: lati di misura intera

Per saper quante unità (se usiamo carta quadrettata, fissiamo i quadretti □ di lato 1 cm) entrano nel rettangolo (immagine a pagina seguente), basta contare quelli di una fila e poi moltiplicare per il numero delle file: ogni fila è formata da 4 □, il numero delle file è 3, in tutto si hanno: 4 □ • 3 = 12 □; esiste la convenzione di indicare il quadretto con il simbolo «cm^2», convenzione che ha alcune buone ragioni, su cui tra poco ci fermeremo. Osservando che il primo numero ha una dimensione e il secondo invece è un numero puro (numero di volte), possiamo scrivere, come fase intermedia: $4\ cm^2 \bullet 3 = 12\ cm^2$ e da qui passare poi alla scrittura «convenzionale»: $4\ cm \bullet 3\ cm = 12\ cm^2$.



Questa scrittura indica in breve il percorso operativo: misurare i due lati usando la stessa unità lineare, moltiplicare le due misure ottenute, introdurre l'opportuna unità di area.
Nell'eseguire la moltiplicazione abbiamo utilizzato convenzioni che riguardano le marche, che possono essere introdotte a questo punto, nel caso che la moltiplicazione sia stata fatta solo su numeri. Dentro questo discorso la scrittura «cm^2» si può interpretare anche in modo del tutto formale: $4\ cm \bullet 3\ cm = (4 \bullet 3)\ (cm \bullet cm) = 12\ cm^2$.

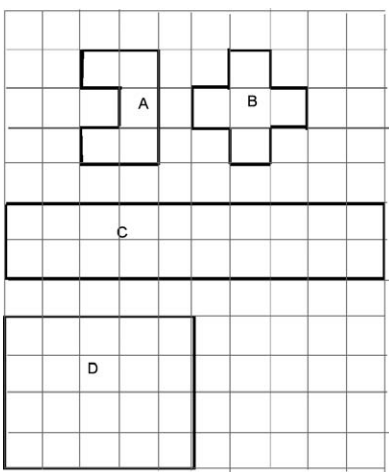
Area di un rettangolo: lati di misura decimale

Consideriamo un rettangolo[3] i cui lati hanno misure 5,2 cm e 3,7 cm; per tornare al caso precedente (lati di misura intera), si può cambiare unità per rendere intere le misure dei lati: 5,2 cm = 52 mm; 3,7 cm = 37 mm.
A questo punto ci si può riferire a una quadrettatura in cui ogni quadretto è 1 mm^2 e ripetere la via precedente, arrivando a calcolare l'area:
$A = 52 \bullet 37\ mm^2 = 1.924\ mm^2$
Per tornare all'unità iniziale, si opera di nuovo un'equivalenza:
$1.924\ mm^2 = 19{,}24\ cm^2$.
A questo punto si può osservare che il risultato si ottiene in modo formale moltiplicando i due numeri decimali e introducendo la ben nota regola per posizionare la virgola nel risultato, trovando un utile e significativo collegamento con la moltiplicazione tra numeri decimali.
In questo procedimento sono stati attuati due cambiamenti di unità di misura, dal centimetro al millimetro e viceversa dal millimetro quadrato al centimetro quadrato. In generale, ci sarà prima un passaggio all'unità in cui la misura dei lati si esprime con un numero intero e permette di utilizzare il conteggio della quadrettatura; si applica infine il passaggio inverso a quello iniziale. Questi cambiamenti difficilmente sarebbero riconosciuti dai bambini se si estendesse immediatamente ai decimali la regola osser-

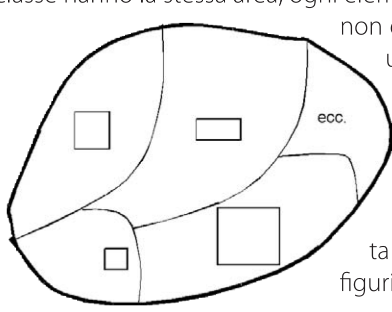
[3] Questo argomento è trattato in [Longo, 2001 a].

vata per i numeri interi (moltiplicare le lunghezze dei due lati). In questo caso la regola non sarebbe supportata dall'intuizione e si potrebbe generare la pericolosa abitudine a usare meccanismi in modo acritico, per cui anche correggere i propri errori diventa difficile.
Infine una volta dimostrata e accettata per l'area del rettangolo la formula $A = l_1 \bullet l_2$, si nota che si può ottenere l'area senza fare il confronto diretto con l'area unitaria, ma utilizzando le misure dei lati: si tratta di una «misura composta», di cui si vedranno poi molti esempi in fisica. Essa comporta una notevole semplificazione del procedimento, rispetto al confronto diretto.

Una relazione d'ordine



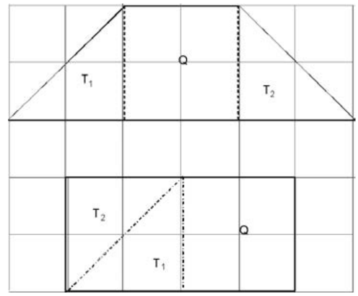
Nel confronto tra due figure geometriche piane A e B (a lato) si possono avere tre situazioni:
area A < area B (si dice che A è minore di B)
area A = area B (si dice che A e B sono equivalenti)
area A > area B (si dice che A è maggiore di B)
Tra le figure geometriche piane si può dunque stabilire una relazione d'ordine largo, indotta dalla analoga relazione tra i numeri razionali, che rappresentiamo con gli stessi simboli usati per i numeri.
Nel disegno a lato, le due figure geometriche A e B sono equivalenti (misurano 5 quadretti); le due figure C e D sono equivalenti (misurano 20 quadretti).
Si ha invece: $A < C$ e $A < D$, $B < C$ e $B < D$.
La relazione di equivalenza tra figure piane, posta attraverso l'uguaglianza della misura della superficie, è un caso particolare di relazione di equivalenza. Essa è riflessiva, simmetrica, transitiva:
riflessiva: $A \approx A$, qualsiasi sia la superficie A;
simmetrica: se $A \approx B$, è anche $B \approx A$;
transitiva: se $A \approx B$ e se $B \approx C$, allora è certamente $A \approx C$.
Come ogni relazione di equivalenza, essa divide in classi non vuote e disgiunte (cioè con intersezione vuota) l'insieme in cui è definita e ogni classe è individuata da un suo elemento qualsiasi. Tutti gli elementi di una classe hanno la stessa area, ogni elemento appartiene a una sola classe e non esistono elementi che non abbiano una classe.[4]



Nella figura a lato è rappresentata la partizione dell'insieme delle superfici in classi di equivalenza contenente figure equiestese, ogni classe può essere rappresentata da un suo elemento, per esempio la figurina disegnata.

[4] Nasce la domanda se la relazione precedente si possa estendere a tutte le superfici piane, in altro modo possiamo chiederci quali coppie di figure possiamo confrontare operativamente. I casi esaminati sono stati il rettangolo (e quindi anche il quadrato, che è un particolare rettangolo) e il triangolo isoscele con un angolo retto, rispetto alle due unità. È interessante l'esempio del confronto di due superfici, apparentemente molto semplici, in [Radaelli, 2008], che mostra come il confronto non sia affatto banale.

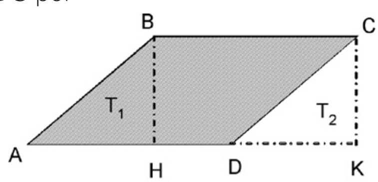
Equiscomponibilità

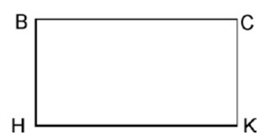


Utilizziamo ancora la proprietà additiva della misura per introdurre un nuovo metodo di confronto: verificare l'equivalenza di due figure piane (cioè l'uguaglianza della loro estensione) attraverso il fatto che si possono scomporre in parti uguali. Si osservi che in questo caso non si opera un confronto diretto né si riconduce la questione a una misura composta. Consideriamo un esempio.
Per stabilire l'equivalenza, senza utilizzare il conteggio dei quadrati con cui si ricoprono le figure, possiamo notare che il trapezio e il rettangolo disegnati si possono scomporre nello stesso modo (cioè appuriamo l'equiestensione senza conoscere numericamente l'area). Attenzione: T_1 e T_2 sono triangoli rettangoli isosceli, quindi sovrapponendo le loro ipotenuse si forma un quadrato; se non fossero isosceli, questo non sarebbe vero! Questo esempio è dunque un caso particolare che non può essere generalizzato a una classe di figure.

Area del parallelogramma

La parola è originata da παράλληλος (parallelo) e γραμμή (linea), è un quadrilatero in cui i lati opposti sono tra loro paralleli (vale per entrambe le coppie di lati).[5]
Nel parallelogramma ABCD dell'immagine a lato, dal punto B si «manda» la perpendicolare al lato opposto (BH perpendicolare ad AD); si trasla il triangolo T_1 (ABH) finché A sia su D, allora AB si sovrappone a DC poiché i due lati (opposti nel parallelogramma) sono paralleli; T_2 è la nuova posizione di T_1; il parallelogramma ABCD e il rettangolo HBCK sono allora equivalenti (cioè hanno la stessa area). Si noti che i due triangoli T_1 e T_2 sono uguali perché hanno i lati paralleli e un angolo uguale (retto).





Per abitudine, si considera il segmento BH come altezza del parallelogramma relativa alla base AD e quindi, se le misure sono espresse in cm, l'area A è il prodotto della base per l'altezza ad essa relativa:

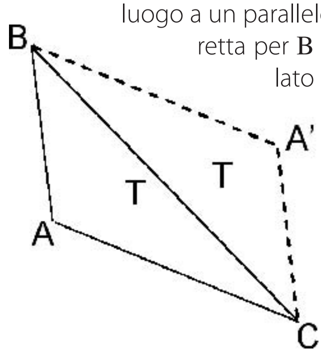
$$A = [m(AD) \cdot m(BH)]\ cm^2$$

dove si è indicato con m(AD) la misura di AD e con m(BH) la misura di BH.[6]
Per avere l'area del parallelogramma, si può quindi evitare il confronto diretto con l'unità di misura e misurare una figura ad esso equivalente. I bambini possono apprezzare questa strada, se provano a individuare la misura ricercata operando mediante confronto diretto con l'unità.
È possibile, e forse opportuno, che si incontrino esperienze di questo tipo attraverso giochi, anche prima che questo argomento sia trattato esplicitamente.

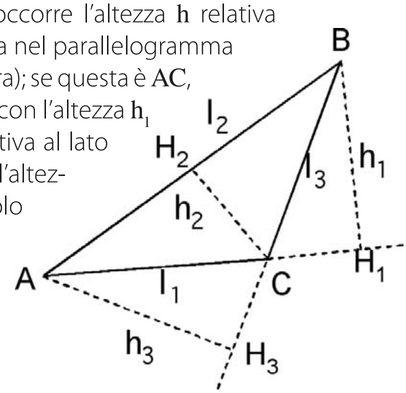
[5] Il rettangolo è un parallelogramma con 4 angoli uguali; il quadrato è un parallelogramma in cui i 4 angoli sono uguali (quindi è un particolare rettangolo) e inoltre i 4 lati sono uguali.

[6] Altezza del parallelogramma è la distanza di un vertice dal lato opposto; il parallelogramma ha due altezze distinte; in quello della figura l'altra altezza è la distanza del vertice A dal lato CD (se la si disegna, il segmento AH´ è esterno al poligono).

Area del triangolo



Un triangolo si può facilmente raddoppiare (immagine a sinistra) dando luogo a un parallelogramma: partendo dal triangolo ABC, si costruisce la retta per B parallela al lato opposto AC, la retta per C parallela al lato opposto AB; siccome queste due rette non sono parallele (i lati di un triangolo non sono paralleli), esse si incontrano in un punto (A' in figura).
Chiamando A_t l'area del triangolo e A_p l'area del parallelogramma, si ha: $A_t = 1/2\ Ap$.
Per calcolare A_p occorre l'altezza h relativa alla base prefissata nel parallelogramma (immagine a destra); se questa è AC, l'altezza coincide con l'altezza h_1 del triangolo relativa al lato AC; se invece è scelta come base AB, l'altezza coincide con l'altezza h_2 del triangolo relativa ad AB.
Siccome il procedimento si può eseguire anche costruendo B' e C', possiamo scrivere in generale:

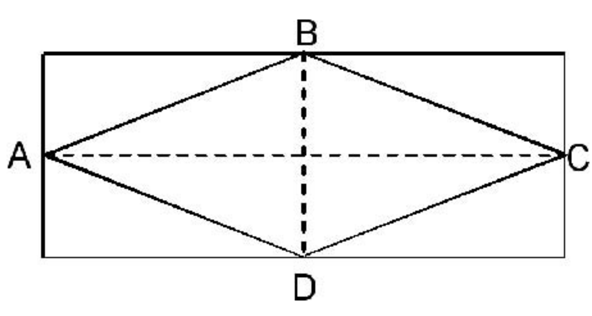


$$A_t = (1/2)\ b \cdot h,$$

dove b e h sono base e altezza corrispondenti.
Se b e h sono espresse in cm, l'area è espressa in cm^2.
Questa è una buona occasione per ricordare che per ogni lato di un triangolo è definita un'altezza, come si vede in figura. Un triangolo ha 3 altezze, ciascuna relativa a un vertice e alla base opposta ad esso.

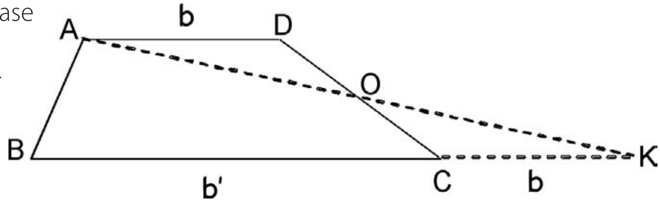
Area del rombo

Un rombo si può raddoppiare costruendo per ogni vertice la parallela alla diagonale che non passa per esso; siccome le due diagonali sono tra loro perpendicolari, si ottiene un rettangolo che ha come misure dei lati le misure delle due diagonali.



Chiamando A_{rt} l'area del rettangolo, A_{rm} l'area del rombo, d_1 e d_2 le misure delle due diagonali del rombo, si ha:
$A_{rt} = d_1 d_2 = 2\ A_{rm}$
e quindi per l'area del rombo:
$A_{rm} = (1/2)\ d_1 d_2$.

Area del trapezio



Nell'immagine a lato, b = m(AD) è la base minore; b'= m(BC) è la base maggiore.
Costruiamo un triangolo (di cui sappiamo calcolare l'area) equivalente al trapezio.
Si prolunga la base maggiore di un segmento lungo quanto la base minore (cioè sulla retta BC si riporta a partire da C la base minore), in modo che sia: m(BK) = b'+ b.
Si congiunge A con K; AK interseca CD in O.
I due triangoli AOD e KOC sono uguali; l'eguaglianza si può dimostrare mediante uno dei criteri di uguaglianza dei triangoli, ma i bambini la possono verificare empiricamente.
Segue che il triangolo ABK è equivalente al trapezio, e dunque:

$$A_{trap} = (1/2)\,(b' + b)\,h$$

L'altezza è quella dal vertice A al lato opposto, distanza delle due rette parallele che contengono le basi.[7]

Consigli didattici

Come in ogni argomento, il tempo dedicato a formare le idee di base deve essere lungo; esso si svolge attraverso esperienze spontanee ed esperienze guidate.
Occorrono perciò molte occasioni di ripresa, altrimenti si corre il rischio di parlare di oggetti (mentali) che sono sconosciuti ai bambini, oppure di cui hanno una conoscenza molto vaga.
Come punto finale, occorre imparare a trattare questi oggetti con i termini caratteristici della matematica.
Per dare senso a parole fondamentali, e per farle diventare proprie per ciascuno, non basta enunciarle, ma occorre creare occasioni di discorso in cui si usino molte volte i termini importanti, per esempio a partire da attività che dopo essere state eseguite vanno raccontate [Longo, 2002 b] e discusse.
Diamo qualche brevissimo esempio.
Si può percorrere il bordo di una figura in palestra, di un'aiuola in giardino; colorare il contorno di una figura sulla lavagna, sul quaderno; cercare pittori che hanno usato la tecnica di calcare il contorno (per esempio Munch); orlare il contorno di una tovaglia; preparare la cornice per un quadro; usare anche il computer se possibile.

[7] Il passaggio alle formule inverse non è un problema di geometria, ma di conoscenza del legame tra un'operazione e la sua inversa. Una difficoltà per i bambini può essere staccarsi dalla figura per avere un approccio solo numerico, infatti è questo approccio che permette di passare da una formula diretta all'inversa.

Si possono eseguire misure lineari: misurare la lunghezza dell'aula, l'altezza della lavagna, l'altezza dei bambini a fine anno e all'inizio dell'anno successivo, la lunghezza di un tavolo, l'altezza della finestra o della porta.
Si possono fare esercizi in palestra per sperimentare l'estensione di una superficie piana; usare il *tangram* e fare poi utili osservazioni sull'equiestensione.
Infine si possono eseguire misure di estensione: confrontare figure della stessa forma e di forme diverse; paragonare tra loro i vari criteri che si usano per confrontare figure e calcolarne l'area.
È opportuno fare osservare più volte che l'area è additiva come tutte le misure.
È importante far apprezzare che con una formula si supera la questione della misura diretta per riportarsi alla misura di grandezze già note: non sarebbe conveniente riportare tante volte un quadrato per misurare l'area di una piazza quadrata, è molto più semplice misurare i lati. In queste osservazioni risiede l'utilità delle misure composte, di cui si fa largo uso in molti campi. Analogamente per l'uso dell'equivalenza di figure.
Gli insegnanti devono riflettere su quale scopo sia conveniente e ragionevole assumere.
Impadronirsi del meccanismo della scomposizione di figure? normalmente è visto solo come un esempio iniziale, che poi viene dimenticato. Questo basta o è meglio esercitarsi e ricordarlo? Si tratta di un punto interessante per cominciare a parlare dello studio della matematica.
Impadronirsi delle formule? In che senso? Saperle scrivere con immediatezza? Saperle ricostruire? Saperle usare andando a ricercarle su una tabella? sono tutte vie da percorrere.
Cosa significa memorizzare le formule? Che senso ha la memoria in matematica? Con quale processo si ricorda? Si tratta di fare esercizi di osservazione della propria memoria in varie materie [Longo, 2001].
I problemi infine sono strumento essenziale per introdurre i vari temi, come in aritmetica.
Nel problema le relazioni astratte vengono contestualizzate: si riporterà il perimetro al contorno di un oggetto reale, l'area alla misura dell' estensione di un oggetto reale, permettendo a ciascun bambino di usare un linguaggio (noto) relativo al contesto scelto e di astrarre lentamente e personalmente l'idea geometrica. ❖

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE
Jaquet Francois, 2000 a, *Il conflitto area/perimetro*, 1° parte, *L'Educazione Matematica*, n.2.
Jaquet Francois, 2000 b, *Il conflitto area/perimetro*, 2° parte, *L'Educazione Matematica*, n.3.
Longo Paola, 2001, *Memoria e matematica*, in *Il Quadrangolo*, anno 3, n.3/4, pp. 27-34.
Longo Paola, 2002 a, *Misura e numeri*, in *Emmeciquadro*, n.15, pp.50-53.
Longo Paola, 2002 b, *Narrazione e matematica*, in *Emmeciquadro*, n.16, pp.39-44.
Radaelli Lucia, 2008, *La misura in scuola primaria*, in *Insegnare matematica, esempi di buone prassi in Lombardia*, P.Longo, S.Barbieri (a cura di), Guerini e associati, Milano, pp.136-146.