

SIMBOLI E SCRITTURE

introdurre all'algebra nella secondaria di primo grado

di Anna Marazzini*

L'autore affronta le difficoltà legate all'uso dei simboli in matematica. Gli esempi riguardano la scuola secondaria di primo grado, ma l'articolo offre a tutti gli insegnanti l'occasione di comprendere le difficoltà legate al simbolo e di elaborare un metodo di insegnamento che ne tenga conto. I simboli sono essenziali, ma per imparare a gestirli occorre una lunga formazione, perché la natura del simbolo è unità fra segno e significato. La frattura tra questi due livelli genera formalismi vuoti, percepiti dagli alunni come un inutile peso. Nasce un ostacolo al «pensare bene»: invece dei concetti vengono imparati solo i segni che li rappresentano. Si rivelano controproducenti tutti i metodi che tendono a separare i momenti del ragionamento e della formalizzazione, soprattutto con gli alunni che presentano una qualche difficoltà di apprendimento.

*Docente di matematica e scienze nella Scuola Secondaria di primo grado "San Tommaso Moro" di Milano.

Simbolizzare è un'azione tipica di chi «pensa matematico». I simboli matematici, le espressioni simboliche, più o meno complesse, che utilizziamo quando operiamo o quando, per esempio in classe durante una lezione, argomentiamo in un contesto aritmetico o geometrico, vanno ad aggiungersi alle parole del linguaggio comune o specifico, alle rappresentazioni mentali e a quelle grafiche.

D'altra parte i simboli non costituiscono semplicemente un'aggiunta al vocabolario del lessico matematico e neppure un codice segreto e criptato di scrittura, in quanto tali simboli potrebbero essere considerati una inutile zavorra e quindi buttati a mare. Essi sono i gradini necessari per passare da un livello di astrazione a un altro più elevato, per incrementare la propria capacità di leggere dentro le cose e di scoprirne il senso. È questo il motivo fondamentale per cui ci interessa esplorare e comprendere i vari aspetti dell'azione del simbolizzare.

La funzione simbolica è connessa con l'apprendimento della matematica, già dall'acquisizione elementare dell'aritmetica, e pervade in modo significativo l'esperienza di lavoro in tutta la scuola secondaria di primo grado.

Qui facciamo riferimento a un momento fondamentale, anche critico

e in un certo senso di rottura, del cammino concettuale di un ragazzo, quello del passaggio dall'ambito numerico all'ambito algebrico attraverso l'introduzione esplicita e l'uso sistematico dei simboli letterali.

Quale meta?

Qual è l'obiettivo che ci poniamo e verso il quale, lezione per lezione, vogliamo guidare gli alunni insegnando algebra?

È stato decisivo per me ripensare e giudicare il mio insegnamento dell'algebra alla luce di quanto scrive Hans Freudenthal in *Ripensando l'educazione matematica* [1].

Nel capitolo espressamente dedicato alla «reinvenzione guidata», Freudenthal esprime alcune riflessioni sugli obiettivi dell'insegnamento, descritti in termini di contenuti ed abilità, che l'alunno deve acquisire. Egli mette in evidenza che il problema della meta verso la quale vogliamo guidare gli alunni è un problema serio che non può essere eluso, ma sorprendentemente non risponde alla domanda con un elenco di contenuti e di abilità, anzi afferma qualcosa che suona paradossale rispetto alla diffusa concezione della matematica.

«Quale che sia l'importanza dei contenuti e delle abilità, essa è molto minore nella matematica che nelle altre materie. Poiché ho presentato insistentemente la matematica come un'attività la risposta alla domanda: "qual è la meta?" sarà: "un'attività". In altre parole, il discente deve reinventare il fare matematica piuttosto che la matematica; l'azione di astrarre piuttosto che le astrazioni; il formalizzare piuttosto che costruire delle formule; il costruire algoritmi piuttosto che gli algoritmi; il parlare piuttosto che il linguaggio. Se il discente viene guidato a reinventare tutte queste cose, allora le conoscenze e le abilità verranno apprese più facilmente, e più facilmente saranno ritenute e applicate.»

Parafrasando Freudenthal, possiamo quindi dire che l'obiettivo, nell'insegnare algebra, non è l'insegnamento dei simboli e delle regole di manipolazione degli stessi, ma consiste nel guidare gli alunni nell'azione del simbolizzare. La simbolizzazione è un aspetto della formalizzazione, perciò insegnando algebra noi mostriamo un modo di «dare forma» al contenuto dell'esperienza di matematizzazione e di pensiero matematico usando i simboli dell'algebra.[2]

La prima affermazione contraddice l'opinione comune secondo la quale un ragazzo non può proseguire nel cammino di apprendimento della matematica se non ha svolto determinati contenuti; tale convincimento induce a proporre frequentemente percorsi analitici e lineari mediante i quali si aumenta sempre di più la quantità dei contenuti senza favorire lo sviluppo organico dei concetti.

Può sembrare inoltre che Freudenthal ritenga secondari i contenuti e che, alla pari dei sostenitori delle teorie costruttiviste, pensi che gli alunni possano costruirsi da sé i concetti e le parole per esprimerli, mentre l'insegnante avrebbe il solo compito di allenare le capacità e di facilitare gli apprendimenti creando situazioni *ad hoc*.

Proseguendo però nella lettura del suo testo si capisce che Freudenthal concepisce i contenuti come il luogo dell'esplorazione razionale, comune all'insegnante e all'alunno.

La nostra esperienza conferma l'affermazione di Freudenthal.

Sappiamo infatti che conoscenze, competenze e abilità vengono conquistate dagli alunni quando sappiamo metterci all'opera insieme a loro, proponendo un lavoro in un contesto significativo, partecipando alle loro scoperte, valorizzando ogni aspetto della loro esperienza di apprendimento.

Penso che a Freudenthal sarebbe piaciuto quanto detto da Eddo Rigotti: «Cos'è per me l'insegnamento? Uno è come in un bottega a costruire rapporti conoscitivi con la realtà. Il giovane arriva e mi vede all'opera, e io lo tiro dentro: tu fa questo pezzo qui; lo incoraggio e me lo trovo lì collega. Stiamo facendo una cosa seria con la realtà.»[3]

Quando si comincia?

I ricercatori in didattica della matematica sono concordi nel ritenere che la base per un lavoro significativo con la notazione simbolica debba essere elaborata in un lungo periodo di tempo.

Ci sono strategie, chiamate pre-algebriche, che possiamo valorizzare là dove l'alunno le applica spontaneamente, ma che soprattutto vale la pena attivare. Sia l'aritmetica sia la geometria offrono numerose occasioni per proporre ai ragazzi esperienze di osservazione, di scoperta di regolarità e di relazioni, di riconoscimento di strutture uguali «mascherate» in forme diverse, di ricerca di soluzioni procedendo per tentativi ragionati. In tutte queste situazioni è possibile guidare i ragazzi a elaborare generalizzazioni e a rappresentarle sinteticamente utilizzando simbolismi.

Tutte queste attività costituiscono una piattaforma utile per far percepire ai ragazzi la sensatezza e la convenienza dell'uso di simboli.

Un esempio interessante è raccontato in un articolo, pubblicato su questa stessa rivista, in cui si mostra che ragazzi di una classe prima, in un'attività di scienze, sono in grado di utilizzare un simbolismo spontaneo, seppur provvisorio, cogliendo alcuni aspetti della funzione d'uso dei simboli introdotti.[4]

Nel terzo anno, in modo esplicito e sistematico, si comincia a dare forma al contenuto dell'esperienza di matematizzazione usando linguaggio, simboli e contenuti specifici dell'algebra.

Simbolo

L'etimologia della parola «simbolo» ci aiuta a chiarire ciò che c'è in gioco: «simbolo, da *symbolum*, oggetto diviso in due che costituiva un segno di riconoscimento quando i possessori potevano ricongiungere le due parti.»[5]

La definizione evidenzia in modo figurato la natura del simbolo: unità fra segno e significato. Fino a che le due parti non si congiungono, ovvero fino a che il segno rimane staccato dal significato, non siamo in grado di riconoscere, di entrare in rapporto conoscitivo con ciò a cui il segno rimanda. Il mancato riconoscimento del significato causa permanenza in uno stadio di concettualizzazione immaturo e, nel tempo, infecondo. In particolare è importante comprendere che il simbolismo matematico è sì «semplice», ma dà forma a significati, a strutture organizzate di pensiero, via via sempre più complesse.

All'origine degli errori

Nella frattura fra segno e significato si innestano errori, incomprensioni, formalismi vuoti che vengono percepiti dagli alunni come un inutile peso e che costituiscono effettivamente un ostacolo al «pensare bene», in quanto non vengono imparati i concetti, ma solo i segni che li rappresentano.

Per noi, abituati a operare attraverso i simboli avendone conquistato il significato, l'espressione simbolica, per esempio di una relazione, risulta semplice, chiara ed evidente, sintetica e ricca, anche conveniente rispetto all'espressione verbale.

Per gli alunni invece non è così. Ne è un esempio la scrittura simbolica delle frazioni. La frazione ha diversi significati e diversi modi di rappresentazione, peraltro non sempre trasparenti rispetto al significato stesso. La mancanza di trasparenza è all'origine di errori che si manifestano in modo eclatante nell'applicazione degli algoritmi di calcolo.

Osservazioni analoghe si possono fare riguardo alle espressioni letterali; pensiamo alla fatica che fanno gli alunni ad accettare, prima ancora che a comprendere, che $-a > 0$ è una scrittura sensata.

In una relazione tenuta al convegno annuale del GRIMED (Gruppo di Ricerca Interuniversitaria su Matematica e Difficoltà) Francesco Arzarello scrive: «Vi sono errori che hanno un carattere di pervasività e di universalità tali da far pensare che affondino le loro radici nel profondo delle discipline e delle conoscenze degli alunni. Parleremo allora di ostacoli.

Molto si è scritto su ciascuno di questi ostacoli; io vorrei sottolineare un loro aspetto comune che affonda le radici nel modo in cui insegnanti e alunni intendono l'uso del linguaggio formale in matematica.

C'è un unico filone di pensiero dietro a tutto questo: la separazione cre-

scente e totale tra i segni usati in matematica e i loro significati. Ciò porta a rigidità incredibili e a una mancanza di flessibilità del pensiero; gli alunni separano nettamente le proprie capacità di ragionamento dai formalismi e dai meccanismi che invece sarebbero dettati da qualche crudele divinità che si proporrebbe sistematicamente di non far capire nulla.» [6]

Di fronte all'ostacolo e agli errori ricorrenti l'insegnante spesso rischia di oscillare fra due posizioni entrambe perdenti: la prima è la rinuncia a preparare con pazienza il terreno concettuale che favorisce il pensiero algebrico, la seconda il formalismo ovvero l'introduzione di simboli avulsi dal loro significato e di regole di scrittura e di manipolazione puramente convenzionali.

Sempre Arzarello dice: «Sono controproducenti tutti quei metodi che tendono a separare i due momenti [il ragionamento e la formalizzazione], che corrono dietro ai formalismi troppo precocemente soprattutto con gli alunni con rendimento medio-basso.»

Negli atti di un convegno dell'UMI si trova questa indicazione: «Sono da evitarsi, perché inutili, gli addestramenti alle pure manipolazioni sintattiche delle formule: gli automatismi necessari non sono infatti moltissimi a questi livelli di età e comunque le ricerche in merito dimostrano che i feroci addestramenti alle manipolazioni delle espressioni non sortiscono alcun effetto nella comprensione dei concetti da parte degli allievi e nella loro capacità di risolvere problemi.» [7]

Penso che l'esperienza di ciascuno di noi possa confermare la verità di queste affermazioni.

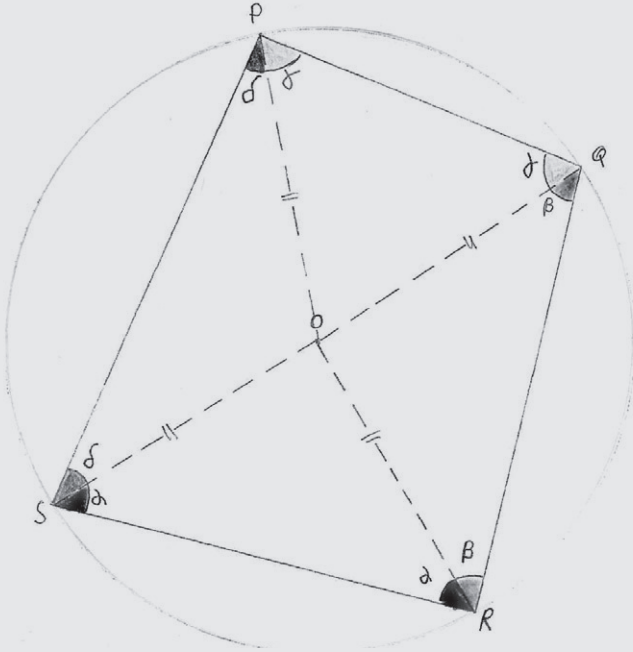
Osserviamo, per esempio, che alcuni alunni, pur avendo acquisito una certa capacità manipolatoria operativa nel calcolo letterale, sono smarriti di fronte a situazioni problematiche, anche semplici ma poco praticate. Questi alunni non possedendo il significato del simbolo o della formula, non sono in grado di attingere dal loro bagaglio-zavorra che si sono costruiti ciò che servirebbe per scegliere e seguire una strada risolutiva.

Quando invece segno e significato sono collegati avviene un cambiamento, un'evoluzione nel modo di guardare e di vedere il simbolo stesso; evoluzione che consente il passaggio a nuovi concetti, che permette una consapevole manipolazione dei simboli stessi, e di conseguenza consente di utilizzare la rappresentazione simbolica non solo per esprimere sinteticamente un enunciato, una relazione o il procedimento risolutivo di un problema, ma anche per formalizzare i passaggi di deduzione, come vediamo in questo esempio in cui mostriamo un lavoro fatto da un ragazzo all'inizio della terza media.

Nonostante io avessi espresso la dimostrazione a parole, usando un simbolismo solo nella fase di analisi dell'enunciato, Giacomo spontaneamente traduce la dimostrazione in simboli (vedi pagina a fianco).

Successivamente il lavoro di Giacomo diventa patrimonio di tutti, dando lo spunto per introdurre l'algebra in un contesto significativo, mostrando la convenienza della simbolizzazione.

Gli angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza sono supplementari (la loro somma misura 180°).



IPOTESI

$$\hat{P} + \hat{Q} + \hat{R} + \hat{S} = 360^\circ$$

$$OP = OQ = OR = OS$$

TESI

$$\hat{S} + \hat{Q} = 180^\circ \quad \hat{R} + \hat{P} = 180^\circ$$

DIMOSTRAZIONE

Osservo che il circocentro è equidistante dai vertici del quadrilatero; da ciò deduco che i triangoli OPQ, ORS, OQR, OSP, sono isosceli e avranno quindi gli angoli alla base congruenti (vedi figura).

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta + \gamma + \gamma + \delta + \delta = 360^\circ$$

e allora

$$\underbrace{\alpha + \beta} + \underbrace{\gamma + \delta} = 360^\circ : 2 = 180^\circ$$

$$\hat{R} + \hat{P} = 180^\circ$$

Ancora Freudenthal dice: «Diremo perché la matematica deve essere insegnata in modo diverso, cioè non come pura forma né soltanto come contenuto, ma tenendo conto del collegamento tra essi, che si attua nel processo di insegnamento e di apprendimento. Imparare significa progredire in conoscenza e in abilità. Il loro collegamento non ha lo stesso carattere di quello tra le voci e gli strumenti in un concerto: è piuttosto un cambiamento di punto di vista, dal contenuto alla forma e viceversa, che conduce a livelli sempre più alti, con salti di una altezza quale il discente si può permettere, e guidato, non sollevato dall'insegnante.»

Queste affermazioni di Freudenthal sono interessanti perché forniscono una suggestiva immagine, sia in positivo che in negativo, dell'insegnamento della matematica, e perché indicano il processo di continuo scambio tra forma e contenuto che è tipico del pensiero matematico e che si realizza in maniera evidente quando si lavora in ambito algebrico.

L'esperienza che racconto, fatta in una classe prima, illustra significativamente il processo di cui parliamo.

Osserviamo nella tavola pitagorica la successione dei quadrati perfetti.

×	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	8	10	12	14
3	3	6	9	12	15	18	21
4	4	8	12	16	20	24	28
5	5	10	15	20	25	30	35
6	6	12	18	24	30	36	42
7	7	14	21	28	35	42	49

I ragazzi osservano abbastanza facilmente che i numeri quadrati crescono secondo una certa regolarità:

per passare dal primo al secondo sommo tre,

per passare dal secondo al terzo sommo cinque,

per passare dal terzo al quarto sommo sette e così via.

1	♥	
4 = 1 + 3	♠	
9 = 4 + 5	♦	
16 = 9 + 7	♣	
...		

Passiamo dall'espressione verbale alla scrittura di semplici uguaglianze aritmetiche; diventa evidente (come nell'immagine a lato) la successione dei numeri dispari.

Diamo forma geometrica al contenuto della «scoperta» usando un'altra rappresentazione (come nell'immagine a destra). Questa nuova forma diventa oggetto di osservazione, consentendo ai ragazzi di «vedere» i numeri dispari come differenza di due quadrati consecutivi e di esprimere in modo diverso la regolarità presente nella successione dei numeri sulla diagonale principale della tavola pitagorica: la differenza fra due numeri quadrati consecutivi è un numero dispari.

×	1	2	3	4	5	6
1	♥	♠	♦	♣		
2	♠	♠	♦	♣		
3	♦	♦	♦	♣		
4	♣	♣	♣	♣		
5						
6						

Propongo di organizzare le successioni di numeri in tabella dando così un'altra forma a quanto osservato; a questo punto viene spontaneo utilizzare una lettera per indicare un numero naturale e guidare alla scrittura in forma simbolica delle parole usate in precedenza.

numero	successivo del numero	numero quadrato	numero quadrato consecutivo	differenza fra i numeri quadrati consecutivi
n	$n+1$	n^2	$(n+1)^2$	$(n+1)^2 - n^2$
1	2	1	4	3
2	3	4	9	5
3	4	9	16	7
4	5	16	25	9
5	6	25	36	11
6	7	36	49	13

Chiedo ai ragazzi di osservare i numeri dell'ultima colonna e quelli della prima e di cercare un eventuale legame; dopo alcune congetture si sono accorti che togliendo uno al numero dell'ultima colonna si ottiene il doppio del numero della prima colonna.

$$3 - 1 = 2 = \text{doppio di } 1;$$

$$5 - 1 = 4 = \text{doppio di } 2;$$

...;

$$13 - 1 = 12 = \text{doppio di } 6;$$

...

Nella classe terza, riproponendo la stessa questione, si è rivelato quanto la consapevolezza del simbolo e della sua funzione fosse più matura nei ragazzi ed è stato abbastanza semplice per loro arrivare a esprimere questa generalizzazione:

$$(n + 1)^2 - n^2 - 1 = n \cdot 2.$$

L'introduzione del simbolo ha permesso di sintetizzare una struttura osservata e letta in profondità. Questa conclusione potrebbe diventare successivamente punto di partenza per nuove scoperte; in quell'uguaglianza, per esempio, è possibile «leggere» che $(n + 1)^2$ è diverso da $n^2 + 1$.

Simbolizzare

Gli esercizi della verifica che presentiamo nella pagina seguente permettono di illustrare l'esperienza di lavoro vissuta con ragazzi di terza in sei ore di lezione durante le quali abbiamo lavorato principalmente sul piano della «traduzione».

Introdurre all'algebra a partire dalla traduzione risulta efficace per diversi motivi.

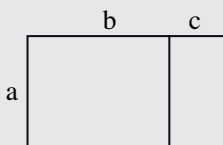
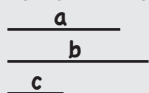
Dare spazio all'esercizio di traduzione offre numerose occasioni per riscoprire e ricomprendere le proprietà delle operazioni.

Esprimi in espressione letterale le seguenti forme verbali:

Moltiplicare un numero per la somma di due numeri è uguale a fare la somma tra il prodotto del primo fattore e il primo addendo e il prodotto del primo fattore e il secondo addendo.

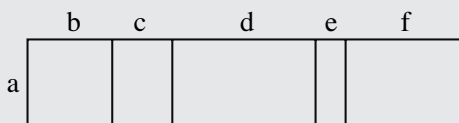
$$a(b + c) = ab + ac$$

DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA



$$a(b + c) = ab + ac$$

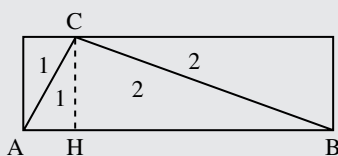
PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA



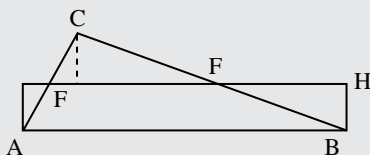
$$a(b + c + d + e + f) = ab + ac + ad + ae + af$$

Permette anche di lavorare in modo nuovo sulle formule geometriche scoprendo l'equivalenza di certe scritte.

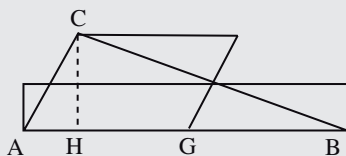
UNA FIGURA... TANTE ESPRESSIONI... EQUIVALENTI



$$\begin{aligned} AB &= b \\ CH &= h \\ A_{\text{rettangolo}} &= b \cdot h \\ A_{\text{triangolo}} &= (b \cdot h) : 2 = 1/2 (b \cdot h) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} AB &= b \\ BH &= CH : 2 = 1/2 h = h : 2 \\ A_{\text{rettangolo}} &= b \cdot (1/2 h) = b (h : 2) = A_{\text{triangolo}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} AB &= b \\ CH &= h \\ AK &= b : 2 = 1/2 b \\ A_{\text{parallelogramma}} &= (b : 2) \cdot h = (1/2 b) h = A_{\text{triangolo}} \end{aligned}$$

Permette poi di chiarire le regole di associazione simbolo-oggetto a cui il simbolo si riferisce, di utilizzare, nel descrivere e nel discorrere, parole come incognita, variabile, costante, in funzione di ..., monomio, polinomio, coefficiente, semplicemente indicando «l'oggetto» che si nomina, introducendo così gradualmente, e nello stesso tempo con rigore, nuovi termini del lessico specifico.

Permette di esplorare contesti, aritmetici e geometrici, passando da una forma descrittiva a un'altra, consente all'insegnante di osservare le diverse strategie utilizzate dai ragazzi, anche gli errori, e di progettare e proporre quindi un percorso che tenga conto di potenzialità e fragilità degli alunni, introducendo gradualmente e in modo sensato i simboli letterali, le regole per il loro uso (con particolare attenzione alle operazioni di sostituzione e di trasformazione) e le convenzioni di scrittura. Consente inoltre di mettere in luce, esaltandola, l'essenza dell'algebra che è la rappresentazione simbolica di relazioni: le formule possono essere riscoperte come relazioni e a questo passaggio corrisponde un'evoluzione nel modo di concepire il segno di uguaglianza: da « = » come comando per eseguire un'operazione a « = » come simbolo di equivalenza. Se ciò accade le formule non sono più concepite come qualcosa di esterno agli oggetti, da applicare agli oggetti, ma diventano strumento di pensiero sugli oggetti.

La verifica

La verifica, di cui riportiamo il testo alla pagina seguente, è stata pensata e costruita in modo da poter valutare i livelli di competenza raggiunti relativamente ai processi di: codifica e decodifica, analisi di situazioni problematiche e loro formalizzazione facendo uso di espressioni letterali per esprimere le relazioni osservate. Infatti gli esiti della verifica (alcuni dei quali riportati da pagina 87) hanno confermato alcune osservazioni emerse durante le lezioni.

Gli errori dei ragazzi sono meno nel processo di codifica e sono soprattutto nell'uso delle parentesi; sono invece frequenti, anche importanti, nel passaggio di decodifica. In questa richiesta infatti emerge la difficoltà a distinguere la struttura additiva da quella moltiplicativa.

Per esempio:

$a^2 + b$ viene tradotto così: aggiungo b al doppio di a (esercizio 1b)

$5 \cdot b^2$ vuol dire eseguire il prodotto $b \cdot b$ per 5 volte

quindi $5 \cdot b^2 = b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$ (esercizio 3c).

Questi errori confermano che il processo di codifica mediante l'uso delle lettere, anche di semplici situazioni, deve essere attentamente guidato e colto come occasione per correggere o consolidare precedenti apprendimenti.

Si conferma anche che il passaggio di «sostituzione» di valori numerici alle lettere non è spontaneo né automatico nei ragazzi; ancor meno spontaneo è il passaggio di trasformazione.

VERIFICA DI ALGEBRA (tempo 90 minuti)

Esercizio 1

a) Traduci le seguenti frasi in espressioni letterali

- > Sottrai dalla metà di a il doppio di b .
- > Sottrai dal doppio della somma di x con y il prodotto di x con y .
- > Dividi la somma fra x e il triplo di y per il quoziente fra x e y .
- > Fai il prodotto fra la somma di x con y e il quadrato della loro differenza.
- > Moltiplica il cubo della somma di tre numeri per la somma dei loro quadrati.

b) Esprimi in forma verbale le seguenti espressioni letterali

$$2 \cdot x + \frac{y}{3} \quad z^2 - \frac{3}{z+1} \quad (a^2 + b)(a - b^2) \quad \frac{3 \cdot (x^3 + y^3)}{(x + y)^3} \quad (n + m)^2 - (n - m)^2$$

c) Interpretando ogni lettera come misura di un segmento, rappresenta geometricamente le seguenti espressioni letterali

$$a \cdot b + x^2$$

$$a \cdot b + x^2 \quad \text{nel caso in cui } a = b = 2 \cdot x$$

$$a \cdot b + x^2 \quad \text{nel caso in cui } a \text{ sia un terzo di } b \text{ e } b \text{ sia la metà di } x$$

$$a \cdot b \cdot c$$

$$a \cdot b \cdot c \quad \text{nel caso in cui } a = b = c$$

$$a \cdot b \cdot c \quad \text{nel caso in cui } a \text{ è il doppio di } b \text{ e la metà di } c$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Confronta queste ultime due espressioni e i disegni ottenuti. Scrivi le tue osservazioni.

Esercizio 2

Leggi attentamente la situazione presentata

Durante un viaggio di tre giorni il signor Rossi affronta delle spese. Il primo giorno spende il doppio del secondo giorno, il terzo giorno la spesa è il triplo di quella dei due giorni precedenti. All'inizio del viaggio il signor Rossi aveva con sé 600,00 €.

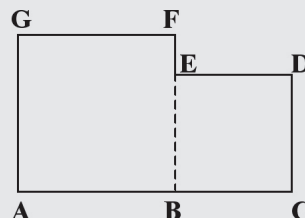
- > Indica con a la spesa del secondo giorno e con x i soldi ancora in possesso del signor Rossi alla fine del viaggio. Scrivi l'espressione letterale che descrive la situazione.
- > Calcola il valore di x sapendo che la spesa del secondo giorno è stata di 39,00 €.

Esercizio 3

Osserva con attenzione l'esagono concavo ACDEFG formato da due quadrati.

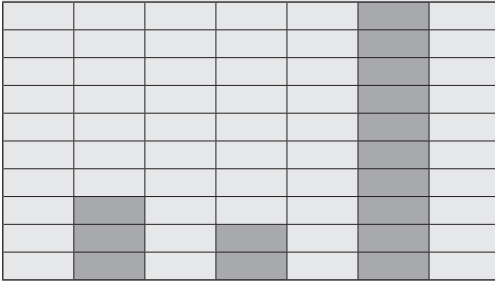
Indica con a la misura di AB e con b la misura di BC.

- a) Esprimi mediante espressioni algebriche letterali la misura dell'area e la misura del perimetro dell'esagono.
- b) Esprimi la misura di AF e quella di CG e la misura dell'area di ACG.
- c) Spiega perché è corretto scrivere, nel caso in cui a sia il doppio di b :
area dell'esagono = $5 \cdot b^2$
perimetro dell'esagono = $5 \cdot a$
- d) Esprimi l'area e il perimetro dell'esagono nel caso in cui b è un quinto di a .



Accanto a chi ha saputo svolgere l'esercizio 2 in modo esemplare, come nell'esempio seguente, c'è stato chi ha calcolato il valore della x risolvendo il problema per via aritmetica senza utilizzare l'espressione algebrica, che pure era stata scritta correttamente.

Esercizio 2



$$600 - [2a + a + 3(2a + a)] = x$$

$$600 - [2a + a + 3 \cdot 3a] = 600 - [2a + a + 9a] = 600 - 12a = x$$

$$600 - 12 \cdot 39 = 600 - 468 = 132 = x$$

$$x = 132,00 \text{ €}$$

Nella risoluzione dell'esercizio 3, al punto c) c'è chi deve appoggiarsi a un esempio numerico, come nel caso seguente.

AREA

L'affermazione è corretta perché se b è 10 e a è 20 l'area sarebbe così:

$$5 \cdot 10^2 = 5 \cdot 100 = 500.$$

Il metodo da me precedentemente usato dà lo stesso risultato:

$$20^2 + 10^2 = 400 + 100 = 500.$$

Tramite la prova numerica posso dire con certezza che l'affermazione è corretta.

PERIMETRO

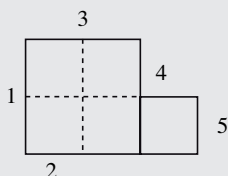
Per il perimetro vale la stessa cosa che per l'area:

a è 20, b è 10 e quindi $5 \cdot 20 = 100$.

Con il metodo da me precedentemente usato ottengo:

$$20 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 20 - 10 = 60 + 30 + 10 = 100.$$

C'è anche chi spiega esclusivamente attraverso il disegno e usa il simbolo solo nella scrittura sintetica finale.



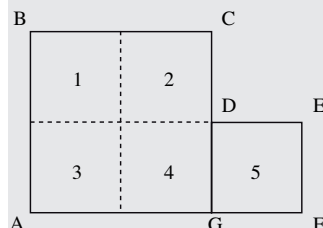
$$a = \text{doppio di } b$$

$$2p = 5 \cdot a$$

$$A = 5 \cdot b^2$$

C'è infine chi verbalizza valide considerazioni di tipo relazionale ma sfugge all'uso del simbolo, già tenta, anche se non sempre correttamente, la manipolazione di quelli che noi chiameremmo monomi e polinomi.

PRIMA SOLUZIONE



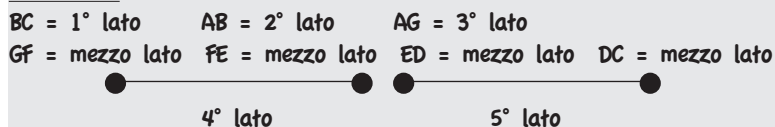
Se a fosse il doppio di b , è corretto scrivere $\text{Area} = 5 b^2$ perché in questo caso l'area di BCDE ci sta 4 volte nell'area di ABFG; a tutto ciò aggiungiamo l'area di BCDE. Insomma il quadrato BCDE ci sta 5 volte nell'esagono.

È corretto scrivere $2p = 5 \cdot a$ perché la somma di tutti i lati b è uguale a 2 lati a ; a tutto ciò sommo 3 lati a . Alla fine ho (2 lati a) + (3 lati a) = 5 lati a .

SECONDA SOLUZIONE

Area Sarebbe giusto perché facendo b^2 troverei l'area del quadrato piccolo e la moltiplicherei per 5 perché posso scomporre l'esagono in 5 quadrati congruenti a quello di partenza.

Perimetro



Perciò posso "trovare" 5 lati uguali.

I risultati di questa verifica mettono in luce che le competenze nell'ambito dell'algebra si sviluppano in complessità durante gli anni. È nostra responsabilità, come insegnanti di scuola secondaria di primo grado, porre le basi affinché questo sviluppo si accompagni armonicamente alla evoluzione e maturazione della capacità di dire e di pensare la realtà osservata da parte degli studenti. ❖

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

- [1] H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica*, La Scuola, Brescia 1994.
- [2] R. Manara, *La matematica e la realtà*, Marietti, Genova-Milano 2002, Simbolizzare, cap. VII.
- [3] E. Rigotti, *Il linguaggio nella didattica delle discipline*, Atti del Corso di Aggiornamento *Il linguaggio nella didattica delle discipline scientifiche*, promosso da Diesse, tenuto presso l'Università Cattolica di Milano, 1994.
- [4] A. Manara, *La misura tra scienze e matematica*, Emmeciquadro n. 36, agosto 2009.
- [5] S. Baruk, *Dizionario di Matematica elementare*, Zanichelli, Bologna 1998.
- [6] F. Arzarello, *Il ruolo dell'errore nell'apprendimento*, in A. Contardi e B. Piochi (a cura di), *Le difficoltà nell'apprendimento della matematica*, Erickson, Trento 2002.
- [7] Atti del XXII Convegno UMI-CIHM, Matematica 2001, *Materiali per un nuovo curriculum di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica* (scuola primaria e scuola secondaria di 1° grado).