DIVISIONE NELLA SCUOLA PRIMARIA

significato e calcolo

*di Anna Paola Longo**

Questo articolo contiene una traccia ragionata di un percorso sulla divisione che si può svolgere nella scuola primaria. Si parte dalla divisione come operazione inversa della moltiplicazione, cioè si ragiona per quei numeri naturali che sono già stati trovati come prodotto, non solo quelli che sono sulla tavola pitagorica, ma anche tutti gli altri che si possono ottenere da moltiplicazioni. Si collegano reciprocamente le situazioni di moltiplicazione e di divisione ricercando i significati della nuova operazione. Si introduce poi, attraverso situazioni problematiche, la possibilità di operare suddivisioni con resto. Successivamente, la costruzione-scoperta dell'algoritmo fa superare l'ambito della tavola pitagorica come strumento di calcolo.

* Politecnico di Torino.

Quando si parte dalla moltiplicazione per arrivare a definire la divisione, si possono prendere in considerazione due strade, una più astratta, solo attraverso i numeri e una, apportatrice di significati, attraverso i problemi. L'insegnante può percorrerle entrambe contemporaneamente, affinché i bambini imparino l'operazione aritmetica riconoscendone il senso. Sappiamo bene, infatti, che un apprendimento formale, di cui non si vede il significato, resta fragile e difficilmente diventa competenza. Il percorso è immaginato dentro l'ipotesi dell'applicazione del metodo didattico della reinvenzione guidata [Longo, 2005].

Primo passo — Via numerica

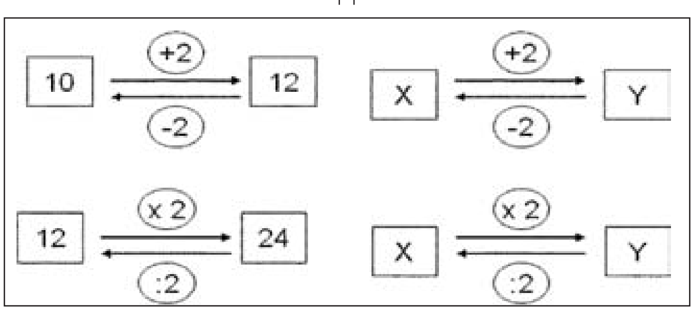
Per ogni numero che compare sulla tavola pitagorica si cercano i due fattori da cui proviene, risalendo nella sua colonna al numero della prima riga e nella sua riga al numero della prima colonna.
Per esempio, se esaminiamo sulla tavola pitagorica (immagine nella pagina seguente) il numero 56, scopriamo che proviene da $7 \cdot 8$ e allora defi-

niamo: 56:7 = 8 e 56:8 = 7 (i due numeri 7 e 8 sono due divisori di 56).
Questo procedimento è analogo a quello che si ha nella somma: se si conosce che 25+10 = 35, si possono dedurre due sottrazioni: 35–25 = 10 oppure 35–10 = 25. In questo modo riusciamo a dedurre due divisioni in corrispondenza di qualsiasi prodotto noto.
Osserviamo che secondo questa definizione non ha ancora senso pensare a una divisione tra due numeri qualsiasi, cioè alla divisione con resto, che è però di grande importanza, sia per ampliare il campo numerico che per risolvere problemi reali.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	6	8	10	12	14	16
3	6	9	12	15	18	21	24
4	8	12	16	20	24	28	32
5	10	15	20	25	30	35	40
6	12	18	24	30	36	42	48
7	14	21	28	35	42	49	56
8	16	24	32	40	48	56	64

Trasformazioni

Proseguiamo nell'analogia con somma e sottrazione. Ricordiamo che nell'esame della struttura additiva sono state introdotte le trasformazioni [Longo, 2008] e queste avevano permesso di pensare a un unico cammino inverso (dalla somma alla sottrazione), interpretando uno degli addendi come «stato» e l'altro come «trasformazione». Per esempio se la trasformazione diretta è «aggiungo 2», (10+2 = 12), la trasformazione inversa è «tolgo 2» (12–2 = 10). Sarebbe la stessa cosa se invece di 10, il primo stato fosse un numero naturale qualsiasi, e quindi si può generalizzare scrivendo: $x+2 = y$, $y–2 = x$, con x e y numeri naturali.
Analogamente si può pensare una moltiplicazione come trasformazione (nel senso dei problemi, oppure come trasformazione di un numero in un altro), dando significati diversi ai due fattori, di cui uno indicherà lo stato e l'altro la trasformazione. In questo caso si può pensare a un unico cammino inverso. Per esempio dalla trasformazione diretta 12•2 = 24, si deduce la trasformazione inversa 24:2 = 12.
La trasformazione rimane la stessa se il primo fattore (stato) cambia, possiamo dunque generalizzarla scrivendo $x \cdot 2 = y$, $y:2 = x$, con x e y numeri naturali (interi positivi).
Si nota che la trasformazione inversa fa cambiare l'ordine in ciascuna coppia ordinata di numeri, relativi alla trasformazione diretta: dalla coppia ordinata (x,y) si passa alla coppia ordinata (y,x) e viceversa. Questo avviene sia nel caso di somma e sottrazione che nel caso di moltiplicazione e divisione. Rappresentiamo le trasformazioni con i simboli convenzionali [Vergnaud, 1994].



Una trasformazione numerica si può realizzare in classe inventando una «macchina» ipotetica che trasforma un numero in un altro. Se gettiamo lo sguardo sul futuro della formazione matematica degli allievi, una trasformazione diventerà presto una funzione: $y = x+2$ e $x = y-2$; $y = 2x$ e $x = y:2$, dove x e y saranno numeri reali.

Nota: esistenza dell'operazione inversa

Se si lavora con numeri naturali (interi positivi), ci sono casi in cui le operazioni inverse non sussistono. Nella struttura additiva, l'operazione $(a - b)$ esiste solo se a è maggiore, o uguale, di b $(a \geq b)$. Quando diciamo, per esempio, nella scuola primaria, che «non si può fare 7-10», intendiamo dire che non esiste un numero naturale x tale che $x+10 = 7$. Su questo i bambini possono riflettere con la guida dell'insegnante.
Analogamente, nella struttura moltiplicativa si può scrivere una divisione per la coppia (a, b), cioè la divisione «$a:b$», solo se a è un multiplo di b (altrimenti non lo si trova sulla tavola pitagorica sulla riga o sulla colonna di b) e, in generale, non esiste un numero naturale x tale che $a = b \cdot x$. Per esempio alla divisione $20:7 = x$ dovrebbe corrispondere $7 \cdot x = 20$, che è impossibile perché 20 non è un multiplo di 7 (come si nota osservando che non compare su riga e colonna di 7 nella tavola pitagorica).
Per dare senso (interno alla matematica) alle operazioni inverse in questi due casi, sono stati introdotti, nella storia della matematica, i numeri negativi (per la struttura additiva) e i numeri razionali (per la struttura moltiplicativa).

Secondo passo

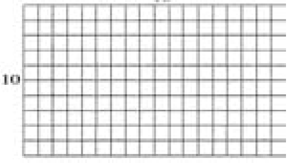
Partire da problemi

Quale strada percorrere per introdurre parallelamente la divisione mediante i problemi? Ogni insegnante può partire da casi già visti di problemi significativi riguardanti la moltiplicazione e dedurre da questi i problemi di divisione.
Le rappresentazioni hanno ancora una funzione importante. Esse devono chiarire a ciascun bambino l'azione, o relazione, a cui si riferisce il testo, e il dato su cui verte la domanda. All'inizio possono essere personali, ma mediante il confronto e la discussione, o mediante un intervento diretto, l'insegnante farà identificare alcune rappresentazioni più significative, che possono essere adottate da tutti.

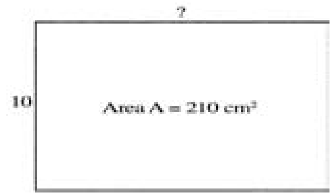
Primo esempio

Problema diretto

Le due dimensioni di un rettangolo misurano 18 cm e 10 cm.
La sua area è $(18 \cdot 10)\ cm^2 = 180\ cm^2$



Problema inverso



Se un rettangolo ha l'area di 210 cm^2 e una dimensione di cm 10, quanto misura l'altra dimensione?
Si tratta di un numero x tale che $x \cdot 10 = 210$, quindi l'altra dimensione è cm 21, che indichiamo con l'operazione $210:21 = 10$.
Il risultato può essere facilmente individuato dai bambini, che certamente già conoscono la moltiplicazione per 10, di cui qui si chiede il procedimento inverso. Nel rettangolo del problema diretto (pagina precedente), sono segnate le dimensioni del rettangolo secondo i dati del primo problema.
Nel rettangolo del problema inverso una dimensione è indicata con un punto interrogativo: è il numero su cui verte la domanda. Manca la quadrettatura per sottolineare che non è nota la misura di un lato. La rappresentazione diventa «qualitativa», molto interessante in matematica. È un punto non facile, visto che nei precedenti problemi diretti erano noti tutti i dati da introdurre nella rappresentazione. Per realizzarla, ora occorre prendere un dato ipotetico, ma il disegno è ancora importante perché serve per capire le relazioni, anche se non i dati quantitativi. Occorre accompagnare i bambini in questo, che è un passo importante verso l'astrazione. I problemi con divisione pongono spesso difficoltà nella rappresentazione, proprio perché si tratta di problemi inversi. Pur senza imporre delle strategie, è opportuno incrementare una riflessione critica sulle rappresentazioni.

Secondo esempio

Problema diretto

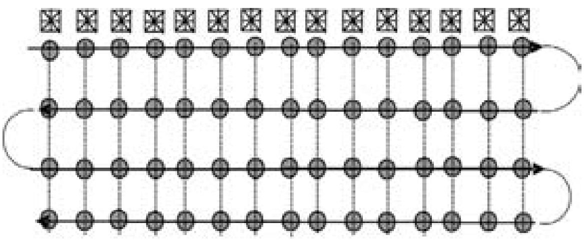
Il pranzo alla mensa aziendale costa 3 euro.
Se mangio per 9 giorni spendo: $3 \text{ euro} \cdot 9 \text{ volte} = 27 \text{ euro}$.
È un tipico caso di somma ripetuta. Il numero dei giorni rappresenta le «volte» in cui si somma.

Primo problema inverso

Il pranzo alla mensa aziendale costa 4 euro, se ho un buono da 32 euro, quante volte posso mangiare?
Si tratta di un numero x tale che $4 \cdot x = 32$ e perciò x vale 8; trascriviamo con la divisione $32:4 = 8$, che ci offre il vantaggio di collocare a destra del segno «uguale» il risultato cercato. La domanda verte sulle «volte», come evidenziarlo nella rappresentazione? Propongo un disegno che non è certamente un obbligo perché ogni bambino può seguire la sua idea. Questo disegno ha solamente il pregio di far capire che si sta raggruppando per 4 (sono gli euro).

Secondo problema inverso

Ho pranzato 15 volte alla mensa aziendale e complessivamente ho speso 60 euro, quanto costa il singolo pasto?
Si tratta di un numero x tale che $x \cdot 15 = 60$ e quindi $x = 4$; trascriviamo con la divisione $60:15 = 4$, che ci offre il vantaggio di contenere a destra del segno «uguale» il risultato cercato. La domanda verte sul «costo per pasto», che è 4 euro, come evidenziarlo nella rappresentazione? Nel disegno a lato, gli asterischi posti in alto rappresentano i pranzi, poi gli euro vengono distribuiti sui pranzi e in verticale si legge il risultato: 4 euro per ogni pranzo. Naturalmente, è solo un esempio.



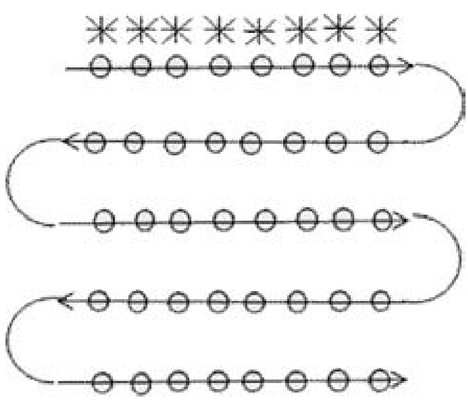
Terzo esempio

Problema diretto

Un bambino ha 8 sacchetti, in ogni sacchetto ha messo 5 biglie. Quante biglie ha in tutto?
Con la moltiplicazione $5 \cdot 8 = 40$ otteniamo il risultato. In questo e nei problemi precedenti si possono diversificare i significati dei numeri con pallini colorati o altri segni usati come legenda: 8 è il numero di sacchetti, 5 è il numero di biglie per sacchetto, 40 è il numero complessivo di biglie.

Primo problema inverso

Un bambino ha 40 biglie, le suddivide in parti uguali in 8 sacchetti, quante biglie mette in ciascun sacchetto?
Si tratta di un numero x tale che $x \cdot 8 = 40$, quindi x vale 5, trascriviamo come prima con la divisione $40:8 = 5$. La domanda verte sul «numero di biglie per sacchetto», come evidenziarlo nella rappresentazione?



Nel disegno si vede una possibile rappresentazione; gli asterischi indicano le colonne dello schieramento, la rappresentazione vuole indicare la distribuzione, una per volta, delle biglie nei vari sacchetti, il numero di biglie in ogni sacchetto si legge nel numero di pallini per colonna. Un'altra buona rappresentazione è una tabella (schieramento) corredata da indicazione sulla natura dei numeri, sia in orizzontale che in verticale.

Secondo problema inverso

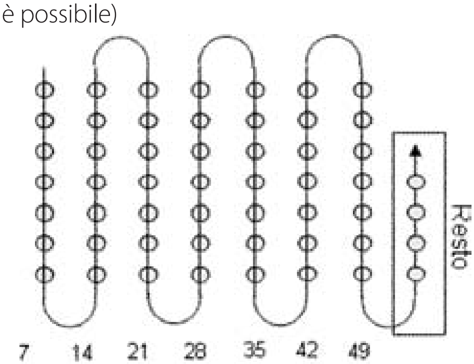
Un bambino ha 40 biglie, può suddividerle in mucchietti da 5 biglie ciascuno? Quanti mucchietti può fare?
Si constata che può suddividerle perché 40 è multiplo di 5. Il risultato è un numero x tale che $5 \cdot x = 40$, quindi x vale 8, e trascriviamo con la divisione $40:5 = 8$. La domanda verte sul «numero dei mucchietti», il risultato si può leggere su uno schieramento.
I numeri scelti negli esempi precedenti rendono possibile usare la tavola pitagorica o la moltiplicazione per 10 per individuare il risultato della divisione. Per alcuni bambini si pone una difficoltà: una volta intuito il risultato, quale divisione scrivere? Per esempio nell'ultimo problema, se si comprende dalla tavola pitagorica che il risultato è 8, può capitare che qualche bambino scriva l'operazione $40:8 = 5$, che non è da considerare un errore grave, ma un passaggio intermedio. Il neo di questa scrittura è che non riporta a destra dell'uguale il numero che si voleva trovare. Per evitare discussioni poco comprensibili, si consiglia di identificare la natura dei dati in qualche modo grafico prima di eseguire l'operazione, per esempio disegnando sotto ciascun numero un segno specifico e costruendo la legenda dei segni introdotti. [si veda un esempio in Radaelli, 2009]

Altri casi che aprono nuove questioni

Se ho 53 cubetti, posso costruire un rettangolo cha abbia un lato di 7 cubetti? (il testo non specifica di esaurire i cubetti, chiede solo se è possibile)
Osserviamo sulla tavola pitagorica che 53 è compreso tra due multipli successivi di 7, infatti $7 \cdot 7 = 49$ e $7 \cdot 8 = 56$, quindi se si realizza un rettangolo di lato 7, non è possibile usarli tutti: se ne usano 49 e ne restano 4 inutilizzati, come evidenzia la rappresentazione.
Se si volesse usarli tutti, si dovrebbe rispondere che è impossibile, ugualmente se ci si riferisce alla divisione, come definita all'inizio, occorre dire che la divisione (esatta) $53:7$ è impossibile.
È però possibile un ampliamento, visto che nelle nostre manipolazioni reali ci interessa talvolta comprendere quale sia il modo migliore per realizzare l'oggetto desiderato (per noi il rettangolo di lato 7 cubetti) con il minore spreco possibile. Il punto chiave di questo cammino è stato racchiudere il numero 53 tra due multipli successivi di 7, per cui possiamo scrivere: $53 = 7 \cdot 7 + 4$. Traduciamo questo dicendo che $53:7$ dà 7 con un resto di 4. (Nel caso del lato 7, il rettangolo che si ottiene è un quadrato). Questa è una **generalizzazione** della divisione, che prima avevamo introdotto senza resto.

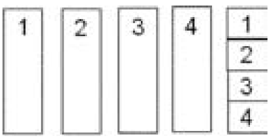
Terzo passo

Prima situazione

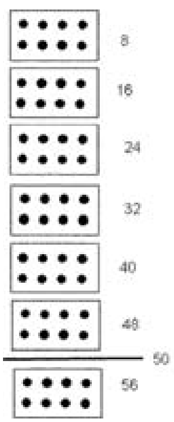


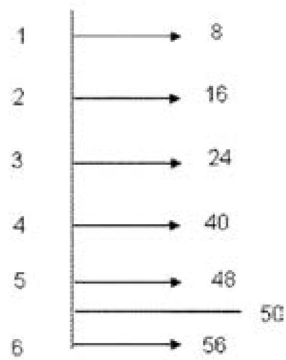
Seconda situazione

Se sono rimasti solo 5 kg di zucchero, si può dividerlo in parti uguali tra 4 famiglie?
Se si distribuisce 1 kg per famiglia, resta 1 kg, che si può ancora suddividere dandone 250 g a ciascuna famiglia.
Abbiamo fatto un altro passo rispetto alla situazione precedente: nel contesto del problema, il resto 1 della divisione rappresenta 1 kg di zucchero, ancora divisibile: possiamo suddividere il resto operando un cambio di unità di misura: 1kg diventa 1.000 g. Con problemi di questo tipo, si avvia all'uso di grandezze continue nella misura e alla divisione con dividendo decimale. A lato, una proposta di rappresentazione (una tra le tante possibili).



Terza situazione





Si vuole fare una provvista di almeno 50 yogurt di un certo tipo, che viene venduto in confezioni da 8, quante confezioni occorre comperare?
Se si osserva che 50 non è multiplo di 8, ma è compreso tra 2 multipli successivi: $8 \cdot 6 = 48$ e $8 \cdot 7 = 56$, si conclude che occorre comperare 7 confezioni e acquistare così 56 vasetti di yogurt.
L'esame di questa situazione permette di approfondire il significato dei termini «almeno», «multiplo» e «divisore».

Sopra e a sinistra si mostrano due possibili rappresentazioni.

Quarta situazione

Lo stesso yogurt si vende nei giorni seguenti sia in confezioni da 8 a 3,50 euro alla confezione, sia in vasetti sciolti al prezzo di 55 centesimi di euro l'uno.
Per fare la provvista di 50 vasetti, conviene acquistare confezioni o vasetti sciolti?
Abbiamo già visto che occorrono 7 confezioni e in questo caso la spesa è di euro 24,50, invece per 50 vasetti sciolti occorrono 27,50 euro, quindi è più conveniente la confezione, anche se obbliga all'acquisto di alcuni vasetti in eccesso.

Quarto passo — Algoritmo della divisione

A questo punto, ci sono due questioni aperte. La prima: se non riusciamo a identificare per via elementare il risultato di una divisione ($a:b$) come facciamo a scoprirlo, cioè come fare la ricerca del quoziente?

La seconda: l'ampliamento introdotto con i problemi precedenti ha dato senso alla divisione di due numeri anche quando il dividendo non è un multiplo del divisore, ammettendo che si abbia sia un quoziente che un resto. Come fare la ricerca del quoziente e del resto?
Entrambe le questioni fanno nascere la necessità di un procedimento di calcolo. Sarà bene introdurlo provocandone la scoperta mediante materiale che permetta di rappresentare il dividendo nella sua scomposizione decimale, e trascrivendo poi i passaggi sul quaderno. Imparato l'algoritmo, si osserva che non occorre verificare preventivamente che il dividendo sia un multiplo del divisore, perché lo si può scoprire alla fine del calcolo: se il resto è nullo, il dividendo è multiplo del divisore (si dice che a è divisibile per b); se il resto non è nullo, si dice che manca la divisibilità.

Ricerca dell'algoritmo

È possibile partire con operazioni concrete, su oggetti o sull'abaco, per far comprendere sia lo scopo che i passaggi del calcolo.
Eseguiamo 3.104 : 2 utilizzando il raggruppamento che rappresenta il numero 3.104:

$\boxed{M}$ $\boxed{M}$ $\boxed{M}$ $\boxed{h}$ | | | | M = migliaio   h = centinaio

Se si inizia a dividere per 2 le migliaia, si vede che si può formare un solo gruppo di 2 migliaia e ne avanza uno, che si può associare alle centinaia sciogliendo il gruppo. Si vengono così a ottenere 11 centinaia. Il numero può essere ora così rappresentato:

$\boxed{M}$ $\boxed{M}$ $\underbrace{\boxed{h}\ \boxed{h}\ \boxed{h}\ \boxed{h}\ \boxed{h}\ \boxed{h}\ \boxed{h}\ \boxed{h}\ \boxed{h}\ \boxed{h}\ \boxed{h}}_{\text{centinaia ottenute sciogliendo un gruppo da mille}}$ | | |

Dividendo le 11 centinaia per 2, si ottengono 5 gruppi da 2 centinaia, con l'avanzo di un gruppo. Questo gruppo può essere trasformato in 10 decine, che associamo alle 3 unità:

$\underbrace{\boxed{da}\ \boxed{da}\ \boxed{da}\ \boxed{da}\ \boxed{da}\ \boxed{da}\ \boxed{da}\ \boxed{da}\ \boxed{da}\ \boxed{da}}_{\text{decine ottenute sciogliendo il gruppo da cento avanzato nella suddivisione precedente}}$ | | | |

Dividendo le 10 decine si ottengono 5 gruppi da 2 decine, successivamente dividendo le 4 unità si ottengono 2 gruppi da 2 unità. In definitiva abbiamo scoperto il risultato: 1 migliaio, 5 centinaia, 5 decine e 2 unità, cioè: 3.104:2 = 1.552.

Si può ragionare in colonna, riportando tutti i passaggi.
Il cambio avviene semplicemente attraverso la posizione delle varie cifre:

	3 1 0 4	2
sono le 11 centinaia, si legge secondo il valore della seconda cifra	1 1	1.552
sono le 10 decine	1 0	
sono le 4 unità	4	

La complessità dell'algoritmo è notevole. Siamo d'accordo con Vergnaud su alcuni punti di metodo [Vergnaud, 1994, pag139]:
«Ancora più che per la moltiplicazione, occorre sottolineare la necessità di utilizzare una procedura e una disposizione spaziale che permettano al bambino di riconoscere senza esitazione il punto in cui si trova. Per esempio: griglia quadrettata per il dividendo e il quoziente; scrittura completa delle sottrazioni necessarie; eventuale indicazione dei calcoli accessori per la ricerca della cifra che soddisfa il quoziente (per questa ricerca, è utile far riferimento alla tabella dei prodotti del divisore per i numeri da 1 a 9).

17	· 1	=	17
	· 2	=	34
	· 3	=	51
	· 4	=	68
	· 5	=	85
	· 6	=	102
	· 7	=	119
	· 8	=	136
	· 9	=	153

Ecco (a destra) un esempio di divisione per 17.

M	h	da	u						
2	4	5	3,	6	1	7			
1	7				M	h	da	u	
0	7	5				1	4	4,	3
	6	8							
	0	7	3						
		6	8						
		0	5	6					
			5	1					
			0	5					

Ci si può accontentare di fare in margine le moltiplicazioni annesse (a sinistra).
Vogliamo sottolineare che non c'è alcun bisogno di ricercare all'inizio divisioni senza resto: l'esistenza del resto dopo la suddivisione di una quantità data non pone alcun problema di concetto.
Mentre l'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione risultano sempre esatte, ciò non è vero per la divisione. Il vero risultato della divisione è la coppia "quoziente, resto", anche se quest'ultimo può essere nullo. La divisione come regola operativa non è esattamente l'inverso della moltiplicazione, salvo che vi si includano considerazioni complesse sui numeri reali che sono al di sopra delle capacità dei bambini. Mentre sul piano dei numeri le trasformazioni "per n" e "diviso n" sono una l'inversa dell'altra, l'operazione di divisione per n non è l'inversa della moltiplicazione per n.» [Vergnaud, 1994]. ❖

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE
Longo Anna Paola, *Esperienza e apprendimento in matematica*, in *Scuola e Didattica*, anno LI, n. 6, La Scuola, Brescia 2005.
Longo Anna Paola, *Immagini mentali e rappresentazioni nella struttura additiva*, in *Emmeciquadro*, n. 34, pp. 33 - 41, SEED, Milano 2008.
Longo Anna Paola, *Il caso delle corrispondenze (nei problemi con moltiplicazione e divisione)*, in *Emmeciquadro*, n. 36. pp. 54 - 60, SEED, Milano 2009.
Radaelli Lucia, *Le trasformazioni nella struttura additiva*, in *Emmeciquadro*, n. 36, pp. 93 - 100, SEED, Milano 2009.
Vergnaud Gerard, *Il bambino, la matematica, la realtà*. Armando, Roma 1994.