INSEGNARE PER EDUCARE

valenze educative della matematica e delle discipline scientifiche

*di Anna Paola Longo**

Nella ricerca didattica si parla di mathematical education*: produrre una buona qualità dell'istruzione in matematica. Fatto certamente molto importante, ma si può andare oltre? È possibile che il normale insegnamento della matematica contribuisca alla formazione globale della persona? In generale, a scuola nel campo scientifico esiste la possibilità di educare? Il contributo è identico per tutte le discipline scientifiche oppure gli apporti sono diversi? E in particolare, quale può essere quello della matematica? L'autore propone su questo tema un piano di lavoro sintetico, che gli insegnanti potranno ampliare corredandolo di osservazioni personali e di una ricca documentazione, a seconda dell'età dei loro studenti.*

* Politecnico di Torino

Tenendo conto dei legami della matematica con le altre discipline scientifiche, per valutare il suo impatto con le problematiche educative, è opportuno allargare lo sguardo a tutto il campo scientifico, apparentemente lontano dalla soggettività della persona.

Poniamo subito una condizione generale: per risultare formativo l'insegnamento deve rispettare sia la natura della disciplina scientifica che le esigenze educative di chi impara.

Le discipline scientifiche, matematica compresa, sono spesso tradite a scuola da interpretazioni che ne falsano la natura. Analogamente, gli allievi non vengono guardati come persone che costruiscono dall'interno il proprio sapere, in cui la razionalità è in continua interazione con l'affettività, con le domande sul senso della vita, del mondo, del sapere. La possibilità di educare, in quanto proposta di significati, non è automatica per le discipline, ma dipende dall'intervento mediatore e critico dell'insegnante, dalla sua cultura, dalla sua umanità, dalla sua relazione con gli allievi, dalla sua capacità di identificare significati negli apparati tecnici. Come primo punto cercherò di collocare le caratteristiche della matematica dentro il complesso delle discipline scientifiche proponendo analogie e differenze, successivamente cercherò di porre alcune linee di metodo per l'insegnamento che tengano conto sia del successo formativo, sia della crescita della personalità degli allievi.

Il metodo

Le discipline scientifiche educano non tanto per la quantità di informazioni che trasmettono, quanto per il fatto di comunicare un metodo di ricerca personale e dare gli elementi di base per comprendere il metodo e il linguaggio della scienza. Questo risultato costituisce una ricchezza stabile per gli allievi, perché lancia la persona nella vita con un forte strumento interpretativo della realtà, sia quella della natura che quella della cultura e dei rapporti sociali.
Si può fare scienza a scuola comunicando un elenco di risultati, oppure educando uno sguardo scientifico, cioè introducendo gli allievi a guardare la realtà con la curiosità di conoscerne i fenomeni, sia per godere la loro bellezza, sia per poterli controllare facendo previsioni utili. Fare scienza come esercizio di memoria meccanica che non coinvolge l'io, oppure come palestra di domande di un io che si coinvolge in prima persona: due posizioni contrastanti, di cui solo la seconda accresce il rispetto e lo stupore per la natura, per la realtà, per se stessi.
La padronanza del metodo scientifico permette di porsi in modo critico di fronte all'abuso attuale di linguaggio scientifico, spesso dovuto al tentativo di dare aspetto scientifico a fatti di cui si pretende affermare la verità in modo insindacabile.
Imparando a riconoscere che ogni affermazione scientifica non è assoluta, ma ha un proprio ambito di validità (per esempio, un teorema di geometria euclidea non vale per le geometrie non euclidee), si diventa capaci di smascherare la pretesa che la scienza sia una strada universale capace di assicurare la verità in senso assoluto. Una buona educazione scientifica conduce a riconoscere le domande a cui la scienza può rispondere, separandole da quelle a cui non può rispondere, suggerendo però che queste domande non sono necessariamente senza risposta, come afferma un certo scientismo assai diffuso, ma che vanno affrontate con metodi a loro adeguati. È proprio la riflessione lunga e minuziosa sul metodo a far crescere la capacità di giudizio, man mano che si riconosce che esso non è un assoluto, ma dipende dall'oggetto su cui verte l'indagine. Infatti, all'interno del metodo scientifico, pur permanendo alcune caratteristiche generali, sono presenti interessanti diversità, legate a classi di fenomeni. Confrontando matematica, fisica, biologia, geologia, astronomia, paleontologia, eccetera, si riconosce il legame del metodo con il contenuto che si sta affrontando.
Una caratteristica estremamente formativa della scienza è che vive nella storia, man mano che si sono delimitati i fenomeni a cui essa guarda. La storia delle discipline scientifiche e della matematica può dare a scuola un contributo importante per chiarire l'origine, come spirito e come metodo, del sapere scientifico, esplicitando le domande di base e il punto di vista di ciascuna disciplina. Ci sorprende come il lavoro di ogni singolo scienziato

sia stato via via ripreso da altri, come in una lunga cordata, manifestandoci il fenomeno umano della tradizione: consegna alle generazioni successive del patrimonio di umanità a cui si è giunti, perché venga utilizzato e ampliato, a cui corrisponde l'amorevole ripresa da parte di ciascuna generazione del patrimonio di esperienze e certezze consegnato da quella precedente.
In matematica il metodo non è solo la deduzione logica: la classificazione ha una parte molto significativa nello studio di limiti, derivate, integrali, equazioni differenziali; la rappresentazione è un'idea fondamentale per comprendere la geometria analitica, per visualizzare importanti caratteristiche delle funzioni, per avere una visione complessiva dell'andamento delle soluzioni di un'equazione differenziale, eccetera. Dominare criteri di approssimazione ha una sua diversa metodologia. Procedere per tentativi è d'obbligo in alcune particolari problematiche. L'osservazione ha un ruolo essenziale nel determinare i procedimenti risolutivi di qualsiasi tipo di problema (per esempio non svolgere i prodotti prima di avere bene osservato la possibilità di semplificare, decidere come riscrivere un limite per poter applicare l'uso di limiti fondamentali o dell'equivalenza). Un fattore essenziale va aggiunto quando si passa dalla descrizione della scienza alla ricerca di un metodo nell'insegnamento scientifico: le caratteristiche di chi apprende (leggi dell'apprendimento, motivazione, età, eccetera) influiscono nella determinazione del metodo.

La verità scientifica

Quali sono i fattori che caratterizzano il metodo nelle varie discipline scientifiche? Ecco un elemento comune: un risultato scientifico è verificabile, un esperimento scientifico è riproducibile. Si può addirittura affermare che un'affermazione è scientifica se si può riconoscere se è vera o falsa rispetto all'ambito di fenomeni con cui è collegata. È importante sottolineare che anche se la verità scientifica non è assoluta, perché ogni teoria ha un suo ambito di validità, tuttavia non è opinabile. Nella scienza non esiste l'opinione, come espressione di relativismo. La scienza non è scettica, né indifferente o impersonale. Lo spirito scientifico consiste nel formulare congetture in base ad alcuni indizi e successivamente accettarle o rifiutarle in base a un'indagine accurata e al confronto con la realtà. Anche in matematica si formulano congetture e si può insegnare a formularle [Longo, 2007]. La congettura nasce dall'osservazione, ma poi per essere considerata vera ha bisogno di essere dimostrata. Nel campo scientifico, dunque, l'intuizione è utile e si pone come presupposto per la dimostrazione. La ricerca della verità caratterizza lo spirito scientifico, incidendo sul metodo. Ci sono domande nella ricerca scientifica che l'umanità si è passata di mano in mano per anni, prima di arrivare a identificare risposte certe. Nella matematica, è noto il caso del teorema di Fermat o la lunga

meditazione a più voci che ha fatto nascere le geometrie non euclidee. Identica è la meta: determinare la verità di un fatto, di una affermazione. Le discipline scientifiche propongono a chi si accosta a esse la certezza di poter arrivare alla verità, pur di individuare un opportuno metodo di verifica. Ereditare l'amore per la verifica e imparare a trasferirla, con i metodi opportuni, a ogni campo dell'esperienza umana, è certamente un grande guadagno per la persona.
Ecco però una differenza: il modo di verificare. Nella matematica il controllo è solo logico, in riferimento alle proposizioni iniziali di una teoria, vero in matematica significa compatibile con le proprietà accettate all'inizio come vere (dette postulati o assiomi), cioè dedotto da esse con passaggi logici inconfutabili. La matematica nella storia del pensiero scientifico ha delimitato il suo campo alla coerenza logica del linguaggio lasciando ad altri il compito della verifica della verità rispetto alla realtà (validità). Compatibilità e validità sono entrambe manifestazioni della ricerca del vero.
Chi lavora a un'indagine scientifica sa che la garanzia dell'esistenza di una risposta alle sue domande è nella realtà che ha di fronte, ma non sa se e quando arriverà a identificarla. Trovare le risposte dipende in gran parte dal fatto che le domande siano ben poste e in parte anche dalla fortuna. L'intento specifico dello scienziato è rappresentare (attraverso il linguaggio matematico) le relazioni che legano i fenomeni naturali. Nascono i modelli matematici, mediante i quali si studiano i fenomeni di una classe delimitata di fenomeni. Ecco un nuovo motivo per affermare che la verità scientifica non è assoluta, il fatto che i modelli siano rivedibili man mano che si scoprono nuovi fenomeni. Un esempio: la teoria della relatività spiega un complesso di fenomeni molto più vasto di quello del modello newtoniano precedente; questo non viene a cadere, ma non riesce a coprire i fenomeni in cui le velocità sono molto vicine a quella delle luce. Il nuovo modello è più generale e contiene il vecchio come caso particolare, ma la validità del vecchio non viene meno nel suo ambito.

«La scienza è una costruzione provvisoria e bisogna viverla attraverso la sua storia per comprenderla completamente e per comprendere anche in che cosa consiste questa sua provvisorietà. Grosso modo si può dire: in ogni periodo lo sviluppo scientifico è funzione di tutte le conoscenze del momento; cambiano le conoscenze, cambiano i fatti, cambia anche la scienza. Ecco cosa è il relativismo scientifico. E non è questa una posizione scettica, malgrado che si possa negare, come io nego, qualunque possibilità alla scienza di conseguire qualcosa di veramente assoluto [...]. Personalmente, lo sforzo che ho fatto da molti anni è stato di sottrarmi a questo insano orgoglio di un sapere definitivo, che la scienza crea in noi; di svelenirmi di quel che il pensiero positivistico aveva sedimentato nel mio spirito e di persuadermi della fatale relatività delle conoscenze scientifiche, senza che questo mi conducesse allo scetticismo verso l'assoluto, ma dandomi anzi la sicurezza dell'assoluto»
[Francesco Severi, 1959, pag.161, 162].

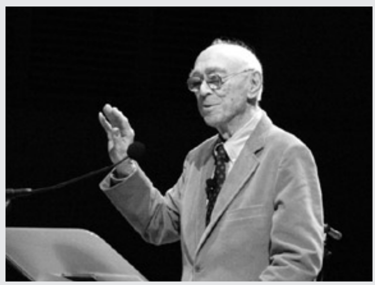

Francesco Severi (1879-1961)

Anche in matematica esiste un'evoluzione interna. Per esempio gli insiemi numerici (numeri naturali, relativi, razionali, reali, complessi) sono emersi in successione, generati uno dall'altro e ciascuno comprende il precedente come sottoinsieme. Ma non tutto può essere familiare a tutti! Molti studenti di scuola superiore e di università, anche se lavorano abitualmente con i numeri reali, conoscono ben poco della loro natura, delicatissima e «astratta»: astratta, tuttavia legata a fatti reali.

La matematica è il linguaggio della scienza

La scienza crea rappresentazioni, fornisce modelli di ambiti osservati dall'uomo, suggerisce ipotesi esplicative. Essa, di per sé, non è né buona né cattiva, è l'uomo che è buono o cattivo quando utilizza per i suoi scopi gli strumenti che la scienza offre. Le teorie scientifiche facilitano la comprensione dei fenomeni reali e permettono di fare previsioni. Tutto questo vale anche per la matematica? La matematica offrendosi come linguaggio, e quindi come fonte di possibili modelli, trasferisce alla scienza la sua ricchezza, cioè la garanzia di coerenza interna e la sua potenza deduttiva.

«La costruzione di "modelli teorici" ai livelli più alti della scienza è naturalmente molto limitata dai linguaggi matematici mediante i quali vengono formulate le teorie avanzate. È ovvio che vengono formulate in quel modo per poter essere il più possibile chiare. La chiarezza consente di evitare le contraddizioni logiche. Ma la matematica ha un'altra funzione: una matematica ben formulata è anche un sistema di accurate deduzioni logiche ed è il pieno potere derivato dalla matematica che lo scienziato vuole sfruttare. Dopo tutto, l'obiettivo di una teoria fisica formulata in termini matematici non è soltanto la descrizione, ma la generatività» [Jerome Bruner, 1997].


Jerome Bruner (1915 - ..)

La matematica, come si è delineata nell'epoca moderna, è diversa dalle altre discipline scientifiche, perché ha delimitato il suo campo di ricerca soprattutto all'aspetto linguistico, è preoccupata della coerenza della forma e non della rappresentazione dei fenomeni naturali. Una formula matematica è un modello di certezza, ma non è immediato attribuirle un significato. È certa perché coerente dal punto di vista logico con le proprietà che la precedono, fino a risalire agli assiomi iniziali del contesto a cui appartiene. Ecco due noti aforismi: «La matematica è una scienza nella quale non si sa di che cosa si parla e non si sa se ciò che si dice è vero» (Bertrand Russel) e «Fino a quando le leggi della matematica si riferiscono alla realtà esse non sono certe; e quando esse sono certe, non si riferiscono alla realtà» (Albert Einstein). Nella matematica può essere difficile rintracciare

un legame diretto con la realtà. È molto evidente, invece, l'aspetto della ricerca della bellezza. Il criterio dell'utilità finirebbe per legare il valore della matematica alle possibili applicazioni, la bellezza guida invece a scoprirne la vera natura di pensiero razionale.
I bambini introdotti nella matematica facendo leva sul pensiero personale e creativo, provano da subito la bellezza e manifestano un vero attaccamento al lavoro, cioè un'evidente soddisfazione. Rivelano che la motivazione al fare matematica non è esterna a loro, ma interna.[1]
A tutte le età, quando i giovani lavorano in matematica con la libertà di indagare, di individuare relazioni, di rappresentare, di simbolizzare, di progettare procedimenti, di fare tentativi e verificarli, arrivano a provare il fascino di questa disciplina e imparano a non spaventarsi di eventuali errori. Il loro io entra in azione quando aderisce alle domande con cui si imbatte. Non è un processo immediato perché occorre accettare la fatica, il rigore della prova razionale, ma è una conquista che dura nel tempo, una ricchezza per la vita. Accettare la fatica per amore della conoscenza e per la consapevolezza della soddisfazione: un bel punto per educare.

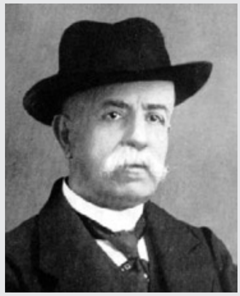
[1] Esempi possono essere rintracciati in [Longo, Barbieri, 2008]

L'arte dell'invenzione

È un fatto che ci riempie di stupore che i linguaggi astratti inventati dai matematici vengano poi utilizzati dalla scienza sperimentale per rappresentare il mondo. È una testimonianza dell'unità interiore dell'uomo e della natura. Ecco un esempio abbastanza noto. Nel Rinascimento, è stata scoperta per le equazioni di terzo grado una formula molto complicata, poi caduta in disuso, talmente complicata che si era ricorso a una poesia per poterla memorizzare più facilmente [Manara, Lucchini, 1976]. In questa formula accadeva un fatto strano: le cose funzionavano solo se si supponeva che ci fosse un numero il cui quadrato è -1, cosa impossibile nel campo dei numeri reali, dove i quadrati sono tutti positivi. Ma l'arte dei matematici è l'invenzione! Siccome serviva a far quadrare le cose, hanno dato il nome «i» a un oggetto ideale (sottoposto però a precise regole di calcolo) tale che $i^2 = -1$, e da questa posizione, allora solo di comodo, sono nati i numeri complessi. Oggi essi sono indispensabili in analisi matematica, in geometria, in ingegneria.
Analogamente è successo per le geometrie a n dimensioni e per le notissime geometrie non euclidee. Ci si smarrisce a cercare di immaginare quante nuove strutture del pensiero qualcuno stia oggi elaborando, a partire da quelle già note e come questi oggetti ideali forniranno nuovi strumenti alla rappresentazione di fenomeni reali. Nell'esempio dei numeri complessi si vede bene come in matematica l'invenzione possa precedere largamente l'applicazione e questo smentisce un attuale pregiudizio, che la ricerca matematica si evolva prevalentemente sotto

la pressione delle questioni applicative, cioè per le necessità poste dal commercio, dall'esercito e così via. Il matematico è invece un appassionato del vero e conosce l'emozione della scoperta, anche se non rifiuta di lavorare per le applicazioni.

«Occorreva coglier insomma le modificazioni delle apparenze nel passaggio da un primo a un secondo osservatore, ossia da un primo a un secondo riferimento; e selezionare tra queste apparenze quelle che rimanevano immutate (invarianti) e non erano dunque apparenze, ma verità reali. È ciò che Einstein fece nel 1916, con uno strumento di calcolo, che per fortuna era pronto: il calcolo differenziale assoluto (oggi si chiama calcolo tensoriale) creato, proprio qui a Padova, da Ricci-Curbastro e da Levi-Civita [...]. La matematica combina tante diavolerie, che non si sa se saranno applicate domani o nell'anno duemila. Il calcolo differenziale assoluto era una di queste. È perciò che bisogna lasciare ai matematici libertà nei loro voli, proprio come si chiede per gli artisti» [Francesco Severi, 1959, pag. 224, 225].



Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1923)

Tullio Levi-Civita (1873-1941)

Guardiamo meglio dentro la matematica

Attualmente l'oggetto specifico della matematica, quello immediatamente visibile, non è la realtà esterna ma i modelli astratti del ragionamento logico: l'impatto con la realtà è mediato dalla razionalità dell'uomo. Il suo contenuto è fatto di oggetti e strutture del pensiero a cui si dà lo statuto di nuovi oggetti reali, ma che non esisterebbero senza l'azione del soggetto nella realtà.

«I *significanti* (simboli e segni) rappresentano infatti dei *significati* che sono essi stessi d'ordine cognitivo e psicologico.
La conoscenza consiste contemporaneamente in significati e significanti: essa non è costituita solamente di simboli ma anche di concetti e di nozioni che riflettono sia il mondo materiale che l'attività del soggetto nel mondo materiale. Se la conoscenza si elabora lentamente, con leggi di sviluppo che psicologi e pedagogisti devono studiare, è proprio perché essa riflette l'attività del soggetto nel mondo materiale e non soltanto il mondo materiale di per se stesso.
Il simbolo non è che la parte direttamente visibile dell'iceberg concettuale; la sintassi di un sistema simbolico non è che la parte direttamente comunicabile del campo di conoscenza che esso rappresenta.
Questa sintassi non avrebbe alcun valore senza la semantica che l'ha prodotta, cioè senza l'attività pratica e concettuale del soggetto nel mondo reale» [Gerard Vergnaud, 1994].

Gerard Vergnaud (1933 - ..)

Ecco dunque tornare la presenza delle realtà nella matematica, attraverso il filtro dell'azione dell'uomo nel suo impatto con il reale. Di conseguenza, per chi studia è più difficile da individuare e ripercorrere il suo rapporto con la realtà, è diversa l'esperienza di apprendere, è diverso il suo metodo interno. Abbiamo affermato che il suo contenuto è fatto di strutture del pensiero a cui si dà lo statuto di nuovi oggetti reali [Maier,1998]. Questo vale fin dall'inizio, anche per i numeri e le figure geometriche. La struttura delle operazioni tra numeri naturali non è identica alle strutture delle azioni che si compiono su oggetti: la moltiplicazione in N (numeri naturali) è commutativa, per esempio $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$; se invece si torna a una situazione reale, per esempio contare le zampe di 3 gatti (che hanno, si sa, 4 zampe ciascuno) non è ragionevole cambiare la funzione dei numeri, cioè non è come chiedere il numero delle zampe di 4 gatti con 3 zampe ciascuno (che semplicemente non esistono).
Spesso le formulazioni matematiche astratte forniscono strutture mentali che sostengono l'immaginazione di modelli, cioè di rappresentazioni. Negli ultimi secoli, l'intreccio tra la conoscenza sperimentale e la matematica è davvero complesso, come leggiamo in Whitehead.

«Nei secoli sedicesimo e diciassettesimo la teoria della periodicità assume nella scienza un posto fondamentale; Keplero scoprì una legge che correla gli assi maggiori delle orbite planetarie con i periodi in cui i singoli pianeti percorrono le rispettive orbite; Galileo osservò le oscillazioni periodiche dei pendoli; Newton spiegò il suono come dovuto alle perturbazioni dell'aria per il passaggio di onde periodiche di condensazione e rarefazione; Huygens spiegò la luce in termini di onde trasversali di vibrazione di un etere sottile; Mersenne stabilì la relazione tra il periodo delle vibrazioni di una corda di violino e lo spessore, la tensione e la lunghezza della corda stessa. La nascita della fisica moderna è frutto dell'applicazione del concetto astratto di periodicità a una grande varietà di casi concreti. Ma questo sarebbe stato impossibile se i matematici non avessero prima elaborato, in astratto, le diverse idee che si concentrano attorno al concetto di periodicità. La trigonometria ha avuto origine dallo studio delle relazioni tra gli angoli del triangolo rettangolo e i rapporti fra i cateti e l'ipotenusa del triangolo. Poi sotto l'influsso della nuova matematica dell'analisi delle funzioni, si è estesa allo studio delle funzioni periodiche astratte semplici che configurano ed esprimono tali rapporti in generale. In questo modo la trigonometria è diventata completamente astratta e, diventando astratta, è diventata utile. Essa ha illuminato l'analogia di base tra gruppi di fenomeni fisici completamente diversi; e al tempo stesso, ha fornito gli strumenti con cui le diverse particolarità di un gruppo potevano essere analizzate e messe in rapporto tra loro. Non c'è nulla che colpisca più di questo fatto: via via che la matematica si elevava e appartava nelle regioni più alte del pensiero astratto tornava poi a terra come uno strumento sempre più importante per l'analisi dei fatti concreti. Il paradosso che le astrazioni estreme sono gli strumenti migliori per controllare la nostra idea dei fatti concreti ha acquisito una solida base» [Alfred North Whitehead, 1979]


Alfred North Whitehead (1861-1947)

Quando durante un incontro con i giovani del Lazio, il 6 aprile 2006, fu chiesto a Benedetto XVI come fare per armonizzare scienza e fede, il Papa diede una risposta molto articolata partendo dalla capacità della matematica di spiegare la natura.

> «Riflettiamo ora su che cos'è la matematica: di per sé è un sistema astratto, un'invenzione dello spirito umano, che come tale nella sua purezza non esiste. É sempre realizzato approssimativamente, ma – come tale – è un sistema intellettuale, è una grande, geniale invenzione dello spirito umano. La cosa sorprendente è che questa invenzione della nostra mente umana è veramente la chiave per comprendere la natura, che la natura è realmente strutturata in modo matematico e che la nostra matematica, inventata dal nostro spirito, è realmente lo strumento per poter lavorare con la natura, per metterla al nostro servizio, per strumentalizzarla attraverso la tecnica. Mi sembra una cosa quasi incredibile che una invenzione dell'intelletto umano e la struttura dell'universo coincidano: la matematica inventata da noi ci dà realmente accesso alla natura dell'universo e lo rende utilizzabile da noi. Quindi la struttura intellettuale del soggetto umano e la struttura oggettiva della realtà coincidono: la ragione soggettiva e la ragione oggettiva della natura sono identiche. Penso che questa coincidenza tra quanto noi abbiamo pensato e il come si realizza e si comporta la natura, siano un enigma e una sfida grandi, perché vediamo che, alla fine, è "una" ragione che le collega ambedue: la nostra ragione non potrebbe scoprire quest'altra, se non vi fosse un'identica ragione a monte di ambedue. In questo senso mi sembra proprio che la matematica – nella quale come tale Dio non può apparire – ci mostri la struttura intelligente dell'universo.
> Adesso ci sono anche teorie del caos, ma sono limitate, perché se il caos avesse il sopravvento, tutta la tecnica diventerebbe impossibile. Solo perché la matematica è affidabile, la tecnica è affidabile. La nostra scienza, che rende finalmente possibile lavorare con le energie della natura, suppone la struttura affidabile, intelligente della materia. E così vediamo che c'è una razionalità soggettiva e una razionalità oggettivata nella materia, che coincidono» [Benedetto XVI, 2006].

Matematica e calcolo

Attualmente, la pratica scolastica della matematica è stata inquinata dall'esaltazione mitica del calcolo che ha posto in secondo piano la sua vera natura di pensiero razionale e creativo, oscurando le questioni che portano al significato. A mio avviso, l'ostilità degli studenti nasce in parte dalla percezione di un fatto vero: che il calcolo è interessante solo se è poco meccanico e finalizzato a una meta.
Un bambino può risolvere un problema di moltiplicazione facendo una somma ripetuta, dimostrando di comprendere la matematica anche se non ha ancora imparato un certo algoritmo.
Il calcolo ripetitivo, quello che consiste nel fare le operazioni in modo meccanico, e farle tante volte per memorizzarle senza mai tornare all'origine concettuale dell'algoritmo, è noioso e poco formativo. Tant'è vero che i bambini allenati con questa mentalità non sanno scegliere le operazioni per risolvere un problema. Un calcolo diventa interessante ed educativo

se si tiene conto delle proprietà delle operazioni, se si cerca la strada più breve, chiedendosi come risparmiare tempo, come ottenere il risultato migliore con il minore dispendio di energie, se ci si chiede come verificare alla fine l'esattezza del risultato. Strategie che vengono potenziate dall'abitudine al calcolo mentale.
Ho lavorato circa due anni «per rimettere dentro la matematica» una ragazza all'inizio della scuola superiore, dopo che aveva studiato a memoria tutta la matematica precedente, in particolare le operazioni con le frazioni. Tutti i vari tasselli navigavano nella sua testa senza essere in relazione tra loro e senza essere legati a un significato, cioè vincolati a una classe di problemi. Lei ne acchiappava ogni tanto qualcuno solo perché aveva una somiglianza formale col compito che stava eseguendo, ma poi non sapeva manipolarlo.

Matematica, esperienza, realtà

Fin qui ho parlato di alcuni aspetti macroscopici che caratterizzano scienza e matematica, essenziali per comprendere il desiderio di conoscenza che ha spinto gli uomini all'indagine e all'invenzione del linguaggio scientifico. Sono punti che senza nessuna artificiosità conducono a chiedersi chi è l'uomo, autore di tanta creatività e di tanto lavoro e contengono in sé una proposta di significato. Perché l'insegnante sappia valorizzare la disciplina, rendendo evidente la sua implicita proposta di umanità, il primo passo è riscoprire e valorizzare la natura della scienza, oscurata dal dilagare del nozionismo. Ma a scuola, oltre alla disciplina, c'è un altro punto essenziale: l'allievo che apprende, che viene introdotto nel sapere scientifico.
Tento di precisare come tradurre l'insegnamento della matematica in forme che tengano conto della realtà di cui fare esperienza e dell'azione di chi impara, per incrementarne il pensiero.
Seguiamo questo cammino per livelli di maturazione.

Primo livello

I primi concetti della matematica derivano, storicamente e psicologicamente, dall'esperienza, e il modo migliore di incontrarla per i bambini è partecipare a esperienze significative. Per esempio, le operazioni possono essere introdotte come rappresentazioni simboliche di azioni. Il problema è lo strumento privilegiato per apprendere, perché descrive azioni dentro contesti. Nei problemi le operazioni sono contestualizzate e quindi legate a significati, le rappresentazioni libere permettono ai bambini di analizzare le situazioni. Così i bambini diventano protagonisti del processo di matematizzazione partendo dall'osservazione di «fatti» e successivamente decontestualizzando. L'insegnamento della matematica nella scuola primaria e secondaria di primo grado dovrebbe avvenire attraverso un continuo passaggio dall'immersione in un contesto (teorema in atto) alla presa di distanza dal contesto per estrarre la forma (astrazione), alternando contestualizzazione e decontestualizzazione.

«La mente del bambino non passa via via a livelli di astrazione più elevati come la marea che sale. Lo sviluppo dipende anche, come ha dimostrato così bene Margaret Donaldson (*Come ragionano i bambini*, Emme Edizioni, 1979; ultima edizione italiana Springer 2010), dalla comprensione pratica che il bambino o la bambina hanno del contesto o della situazione in cui devono ragionare.
Una buona comprensione intuitiva, pratica, di un contesto in una fase di sviluppo porta a un pensiero migliore, più precoce e più profondo nella fase successiva, quando il bambino incontra nuovi problemi più impegnativi in quell'ambito. Come insegnante non si sta ad aspettare che la prontezza "avvenga"; la si promuove o la si puntella approfondendo le capacità del bambino nella fase in cui lo si trova in quel momento» [Jerome Bruner, 1997].

Ma le azioni (attività, giochi, problemi) vanno ripensate, giudicate, comprese, altrimenti l'esperienza non produce pensiero. Il concreto non è magico, generare pensiero a partire dall'immersione in esperienze avviene attraverso la rappresentazione, in tutte le sue forme.
L'idealizzazione, necessaria per dare vita nella mente alle idee matematiche, e l'apprendimento sono raggiunti attraverso la rappresentazione grafica, il racconto di quello che si è fatto, il confronto tra i diversi procedimenti dei bambini della classe, la composizione di una relazione sul lavoro di una mattinata, la discussione e poi infine l'esercizio. Il bambino diventa protagonista: l'apprendimento è vissuto come un fatto storico e questo educa a una posizione esistenziale vera.

Secondo livello

Siamo ormai dentro la matematica, impariamo a lavorare da matematici! Segnalo alcuni aspetti interessanti per far vivere lo spirito della disciplina, per passare dalle nozioni alla riflessione metacognitiva.

Modello matematico

Occorre immergersi in una dialettica fondamentale: la visione interna della disciplina e il suo rapporto con la rappresentazione di classi di fenomeni. Non richiede livelli stratosferici di conoscenza, ma richiede attenzione ai significati.
Quante volte uno studente parla di grafici in matematica, ma non sa interpretare il contenuto conoscitivo di un grafico, per esempio pressione/volume, in un contesto fisico! «Leggere un grafico» è una posizione diversa da quella tradizionale di «studiare un grafico». Significa saper interpretare il linguaggio grafico per riconoscere le proprietà analitiche da esso rappresentate, concepirlo come una «memoria» di proprietà dimostrate o suggerimento per dimostrarne altre.

I tentativi

Restano sempre il primo passo per dare risposta a situazioni problematiche, per inquadrare una situazione, per ripescare in memoria dati utili. Procedere per tentativi è ragionevole solo se i tentativi possibili sono in numero finito.

Una buona occasione per porlo in evidenza, aprendo una riflessione di metodo, è la ricerca delle radici razionali di un'equazione algebrica a coefficienti interi, oppure individuare due punti per fare il grafico di una retta.

Teoria ed esercizio

Sono strettamente intrecciati nello svolgersi del pensiero. L'esercizio più significativo è quello in cui non si fanno solo calcoli, ma si deve fare ricorso a fatti teorici, viceversa affrontare casi particolari permette di comprendere la struttura di una teoria oltre che confermare l'apprendimento. Ha espresso con chiarezza questa relazione una matricola di Ingegneria di un corso di Analisi matematica 1, da me tenuto al Politecnico di Torino.

«Il mio metodo di studio è basato essenzialmente sugli esercizi. La matematica a livello teorico può infatti risultare oscura non tanto per i contenuti quanto per il linguaggio specifico usato per esprimerli. Applicando invece detti contenuti direttamente agli esercizi può essere eliminato il problema del linguaggio e compreso più facilmente il contenuto. Una volta compresi i contenuti dal punto di vista pratico è più facile tornare sulla teoria ed eliminare anche l'ostacolo costituito dal linguaggio».

Memoria e comprensione

Sono interdipendenti ed entrambe indispensabili all'apprendimento.
Si discute moltissimo della memorizzazione delle tabelline, che alcuni ritengono essenziale e richiedono che sia molto precoce (seconda primaria), mentre altri sdrammatizzano insegnandola dopo che il senso della moltiplicazione risulta chiaro ai bambini, altri ancora ne negano assolutamente l'utilità.
Centratissimo il giudizio di Rosetta Zan: «La memorizzazione delle tabelline, e più in generale di fatti aritmetici, permette la costruzione da parte del bambino di una complessa rete di relazioni che rende disponibile, al momento opportuno, una serie di informazioni, alcune di tipo strutturale, altre legate alla rappresentazione.
Ed è proprio questa rete di informazioni che interviene in modo determinante quando il soggetto si trova davanti a un problema, cioè a una situazione per cui non ha a disposizione un algoritmo risolutivo» [Rosetta Zan, 1998].

Riconoscere l'opportunità di un processo

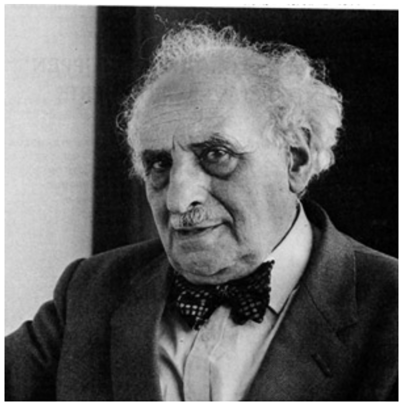
Non è banale. Manca spesso l'idea che un procedimento può essere formalmente giusto, ma non conveniente. La convenienza si riconosce solo in vista di una meta, mentre l'esaltazione della tecnica come fine a se stessa può oscurare questo punto di vista.
Per esempio, calcolare limiti e derivate per fare il grafico della funzione $y = (ax+b)/ (cx+d)$, iperbole traslata, non è assolutamente opportuno perché non minimizza le operazioni di calcolo.

La libertà di sbagliare

È concepibile a scuola?

L'errore è inevitabile, lo è in modo costitutivo per l'esperienza umana: pretendere di annullarlo non sarebbe realistico e annullerebbe ogni processo di elaborazione della conoscenza per tentativi. Tutto si gioca sulla valutazione formativa [Longo, 2008].

Studiare la matematica



Hans Freudenthal (1905-1990)

Studiare matematica non sviluppa automaticamente la capacità di ragionare, che non è solo applicare correttamente formule, ma è capacità di progettare, esercizio del pensiero critico che si sviluppa nell'imparare e capacità di riconoscerla come linguaggio per leggere la realtà.

Senza criticità un allievo sarebbe un eterno ripetitore, privo di capacità creativa e di soddisfazione, che è motore essenziale del desiderio di investire energia e decisione nell'apprendimento [Foletto,2002].

Quindi la crescita della capacità di ragionare è strettamente legata a come si studia. Si può identificare la matematica con le regole?

La regola è uno strumento rassicurante ma la domina chi sa elaborarla, «reinventarla» [Freudenthal, 1994].

La mentalità attuale tende a identificare la ragione con il ragionamento logico, mentre la ragione è un'apertura totale alla realtà, comprende la logica, ma è più ampia.

È una riduzione della ragione pensare che si debba fare matematica comportandosi come un automa, perché ragionare è azione di un soggetto libero: chiedersi le ragioni, osservare, rappresentare, scegliere, progettare percorsi, identificare domande, cercare risposte.

Un io in azione è fondamento essenziale dell'imparare.

Che questo accada implica senz'altro l'adesione dell'allievo: nessuno può sostituirsi alla sua libertà.

Ma implica anche che gli venga fatta una proposta significativa a cui aderire e che gli venga dato spazio dentro una relazione personale con l'insegnante.

Va riconosciuto che il soggetto dell'imparare è una persona dentro la classe e non una classe in blocco [Foletto, 2002].

Occorre anche che la matematica sia comunicata come un particolare punto di vista sulla realtà.

[2] Per ragionare sul metodo di studio ci si può riferire a [Mazzeo 2005].

La matematica a scuola non può essere autoreferenziale: ciò che può affascinare un giovane non sono i metodi e le tecniche, ma la realtà (personale, fisica, storica, sociale, eccetera) che traspare.[2]

Conclusione

Da questa panoramica emerge che la pratica della matematica può davvero incidere su tutta la persona. Che questa possibilità si realizzi a scuola dipende dalle convinzioni e scelte dell'insegnante, il quale attraverso la relazione che vive con gli allievi, comunica se stesso sia come coscienza della propria identità, sia come giudizio culturale e posizione personale di fronte alla disciplina che insegna.

Termino con una breve sintesi per punti su cosa si può guadagnare imparando la matematica, invitando gli insegnanti a fare un lavoro sull'insegnamento per mostrare nei particolari quotidiani il modo in cui questo possa realizzarsi:

il *realismo*, come lealtà verso il dato, caratteristico della scienza sperimentale, emerge anche in un compito di matematica, dove il testo non può essere tradito;

la coscienza della *verifica* come passo inevitabile, da porre in relazione col metodo interno alla disciplina;

la coscienza della *pluralità dei metodi* e del loro legame con l'oggetto;

la coscienza che *la verità c'è e si può raggiungere*, che l'opinione è un primo passo valido solo se considerato come una congettura da sottoporre a verifica;

lo *stupore di fronte al mistero dell'universo*, essendo la matematica uno dei linguaggi per rappresentarlo e interpretarlo;

la consapevolezza della natura ipotetica della cultura;

la consapevolezza dell'idea di rappresentazione;

lo stupore di fronte alla capacità della mente umana di comprendere, unificare ciò che appare diverso, analizzare la realtà. ❖

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

Benedetto XVI, 2006 in http://www.vatican.va/holy_father/benedict_xvi/speeches/2006/april/documents/

Bruner Jerome, 1997, *La cultura dell'educazione*, Feltrinelli, Milano.

Donaldson Margaret, 2010, *Come ragionano i bambini*, Springer-Verlag Italia, Milano.

Foletto Alfeo, 2002, *A scuola con soddisfazione*, ITACA, Castel Bolognese.

Freudenthal Hans, 1994, *Ripensando l'educazione matematica*, La Scuola, Brescia.

Longo Paola, 2007, *Limiti di funzioni periodiche. Grafici, intuizione, congetture*, in *Emmeciquadro*, n. 31, dicembre 2007.

Longo Paola, 2008, *La valutazione in matematica:un processo educativo*, Difficoltà in matematica, vol 5/1, ottobre 2008, Erickson, Trento

Longo Paola, Barbieri Stefania, 2008, *Insegnare matematica. Esempi di Buone Prassi in Lombardia*, Guerini e Associati, Milano.

Maier Herman, 1998, *Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi*, Pitagora, Bologna.

Manara Carlo Felice, Lucchini Gabriele, 1976, *Momenti del pensiero matematico*, Mursia, Milano.

Severi Francesco, 1959, *Dalla scienza alla fede*, Ed. pro Civitate Christiana, Assisi.

Mazzeo Rosario, 2005, *L'organizzazione efficace dell'apprendimento. Personalizzazione e metodo di studio*. Erickson, Trento.

Vergnaud Gerard, 1994, *Il bambino, la matematica, la realtà*, Armando, Roma.

Whitehead Alfred North,1979, *La scienza e il mondo moderno*, Boringhieri, Torino.

Zan Rosetta, 1998, *Tabelline si o no?*, in *Notiziario dell'Unione Matematica Italiana*, Pitagora, Bologna.