EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

n. 49
giugno 2013

SCRIVERE IN MATEMATICA
Un contributo dalla scuola secondaria di primo grado

*di Andrea Gorini**

** Docente di Matematica e Scienze alla Scuola secondaria di primo grado*

L'autore riflette sul significato della scrittura nella ricerca matematica e nell'insegnamento di questa disciplina nella scuola secondaria di primo grado; senza pretesa di esaurirne tutte le implicazioni, propone alcune osservazioni sui motivi per cui l'azione dello scrivere in matematica risulta particolarmente importante a diversi livelli, quello dell'apprendimento dei contenuti specifici, quello del ragionamento, quello logico-argomentativo. Una traccia interessante per una riflessione non scontata sui metodi di insegnamento della matematica e sulle difficoltà così spesso incontrate dagli studenti.

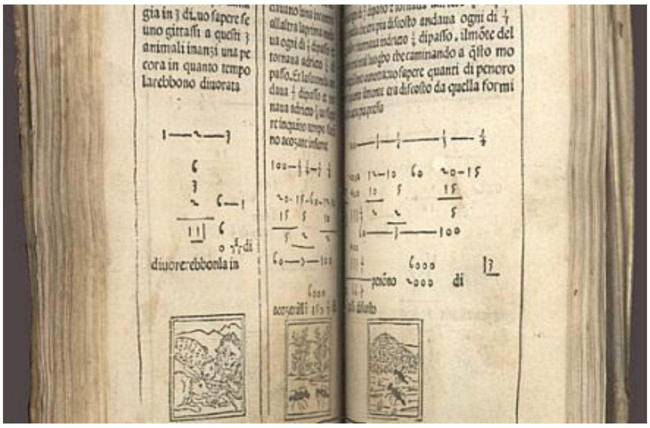


Immagine tratta da: "Filippo Calandri, Trattato di Arithmetica" *(1491-92)*

Secondo Clarisse Herrenschmidt (1946-…) il primo e più rilevante motivo dell'importanza della scrittura in matematica è da cercare nella facoltà che lo scrivere ha di «rendere visibile ciò che non è visibile», ovvero di dare materia al pensiero che altrimenti avrebbe la possibilità di manifestarsi, ma non di fissarsi nel tempo. La scrittura permette di trattenere i prodotti dei processi mentali che descriviamo in termini di «pensieri», consente di tornare a riflettere su di essi, dà la possibilità di confermarli o correggerli, avendo presente il modo in cui sono stati formulati. Anticipiamo un'osservazione a carattere didattico: il lavoro di correzione che possiamo chiedere ai ragazzi o condurre con loro a partire da quanto essi hanno scritto, dalla loro personale elaborazione che hanno fissato attraverso dei segni sulla carta è di fondamentale importanza.
Legato a questo primo aspetto possiamo segnalarne un secondo: la scrittura è un aiuto alla memoria secondo due diverse accezioni. Da un lato alleggerisce la memoria di lavoro evitando alla mente di affaticarsi a trattenere passaggi parziali: basti pensare quando si esegue una complessa addizione in colonna quanto è utile segnare i riporti per evitare di dimenticarli oppure nella moltiplicazione in colonna si scrivono i prodotti parziali per incolonnarli correttamente; più in generale capita nei ragionamenti di collegare una dopo l'altra numerose affermazioni legate da implicazioni; tenere sotto controllo l'intero processo senza l'aiuto di segni può essere così impegnativo da risultare difficile o addirittura impossibile da portare a termine. Da un altro punto di vista la scrittura permette di fissare nel tempo i risultati ai quali si è giunti per poterli riutilizzare in momenti diversi, senza doverli ricavare ogni volta: possiamo affermare che senza di essa il progresso della conoscenza sarebbe sicuramente più difficile e meno stabile.
Un'accezione particolare di quest'ultimo aspetto da rilevare è la facoltà che ha la scrittura di aiutare a maneggiare più agevolmente i concetti, attraverso il simbolismo e la notazione. Per indicare la moltiplicazione «ventitré per diciannove» si usa solitamente la scrittura 23×19, una serie di caratteri ben più ridotta, costituita da simboli,

le cifre del sistema di numerazione decimale posizionale, e dal segno $\times$ che sta a significare l'operazione della moltiplicazione; una notazione invece può essere utile per condensare un calcolo: per indicare una moltiplicazione con 10 fattori ciascuno dei quali uguali a 3 si può scrivere 3^{10}. L'efficacia della notazione è così importante che solo con essa si può considerare concluso il processo di invenzione di un nuovo oggetto matematico, aprendo così la strada a nuovi passi di astrazione: osservare che nel piano cartesiano le coordinate dei punti che appartengono alla stessa retta sono legate tra loro diventa la possibilità di inventare il nuovo oggetto «retta nel piano cartesiano» solo nel momento in cui è possibile esprimerne attraverso l'equazione la sua forma generale. In altri termini la scrittura fornisce una rappresentazione dei concetti matematici che altrimenti non potrebbero essere individuati.

Il paradosso cognitivo di Duval

La natura degli oggetti matematici è un campo di indagine che ha messo alla prova valenti matematici e non è il caso in questo momento di scandagliare la profondità della sua problematica: val la pena solo ricordare che essi sono oggetti del pensiero che devono quindi essere appresi come oggetti del pensiero. A questa osservazione è legato il paradosso di Raymond Duval (1993): «da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica e attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche»[1].
Consideriamo il numero naturale *tre*: questo modo di identificarlo, la sua espressione in termini verbali, è una delle sue rappresentazioni, ma non l'unica: si può anche indicare con il simbolo 3 oppure così | | |. Abbiamo dato diverse scritture per indicare lo stesso oggetto, nessuna di esse coincide con esso, ma tutte contribuiscono a formare correttamente il concetto che esse esprimono.
Occorre fare attenzione nell'attività didattica a non sviluppare negli alunni l'idea che un oggetto matematico coincida con una sua rappresentazione, un rischio che più di ogni altro si incontra per i numeri naturali con l'identificazione con la loro scrittura decimale posizionale.

Caratteristiche del testo matematico accademico

Il valore che assume il testo in matematica può sembrare meno importante di quanto accade per altre discipline: per un profano la dimostrazione di un teorema, forse il testo matematico per eccellenza, risulta difficile da accomunare ad altri testi. A prima vista l'aspetto peculiare più appariscente è la presenza, spesso preponderante, di simboli, alcuni di significato universale come per esempio $\Rightarrow$ implica, o , $\in$ appartiene, altri invece che mutuano il significato dal contesto, le lettere per esempio o le notazioni che vengono dichiarate.
Guardiamo oltre l'aspetto simbolico: con un paziente lavoro di esplicitazione del significato di ciascun simbolo e di riformulazione in espressione verbale si può arrivare a trasformare un qualunque testo matematico fino a fargli assumere una forma testuale prossima a quella consueta, anche se probabilmente a scapito della sua comprensibilità. Osservando la struttura di un testo matematico è facile comunque riconoscere una successione di affermazioni, una connessa all'altra che producono un discorso: la sua specificità risiede nella certezza che esso garantisce, se esso è stato costruito secondo le richieste proprie del metodo della disciplina.
In *La comunicazione verbale* Eddo Rigotti, a proposito del discorso scientifico, di cui il discorso matematico è un esempio per certi aspetti paradigmatico, sostiene:

«L'aggettivo che più spontaneamente si accosta all'espressione *discorso scientifico* è indubbiamente *rigoroso* […] Anzitutto, per essere rigoroso, esso deve essere razionale, cioè esplicitare e controllare il proprio fondamento (la propria giustificazione)»[2] e poco oltre identifica le caratteristiche della teoria scientifica in *coerenza*, *completezza* e *semplicità*: «la coerenza è l'assenza di contraddizioni interne fra le proposizioni (implicite ed esplicite) della teoria; il requisito della completezza chiede che tutti i dati a noi disponibili sull'oggetto, ossia tutti i dati per spiegare i quali la nostra teoria è formulata, siano effettivamente spiegati; il terzo requisito richiama il «rasoio di Ockham» per il quale, fra due teorie che hanno uguale potere esplicativo, va preferita quella che chiede di postulare meno (cioè che chiede di formulare meno ipotesi esplicative)»[3].
Utilizziamo le stesse caratteristiche per indagare la natura del testo scientifico: se la coerenza è una caratteristica che il testo scientifico ha in comune con tutte le altre tipologie di testo, la completezza e la semplicità sono caratteristiche più facilmente ascrivibili al testo scientifico, alle quali si possono aggiungere come ulteriori specificazioni anche l'*inequivocabilità* e l'*economicità*. In un testo scientifico - e matematico in particolare - è indispensabile che tutti gli elementi in gioco siano identificati in modo assolutamente sicuro, senza lasciare spazio alla possibilità di fraintendimenti: è in questo aspetto che si inserisce la necessaria cura lessicale e in particolare la padronanza del lessico specifico che permettono al testo matematico di essere pienamente intersoggettivo. Altro aspetto che è importante sottolineare è il fatto che i testi matematici dicono «tanto in poco», questo implica spesso una vera e propria difficoltà di lettura, non solo per quanto riguarda la decodifica del testo, quanto l'ampiezza della consapevolezza del significato.

La densità dei simboli

Per avere un'idea dell'economicità della scrittura simbolica traduciamo la formula

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$$

(questo è un *testo* per la matematica) in espressione verbale. La scrittura in esame afferma che la somma dei primi *n* numeri naturali, un'espressione composta da un numero imprecisato di addizioni con gli addendi che si susseguono con la stessa regolarità dei numeri naturali, è uguale al risultato di una espressione composta da una moltiplicazione di due fattori, uno identico all'ultimo addendo dell'espressione precedente e l'altro è il suo successivo, seguita dalla divisione del prodotto così ottenuto per 2; tale uguaglianza vale indipendentemente dal numero degli addendi della prima espressione. Vale la pena sottolineare che l'addizione indicata dalla prima espressione non può essere scritta altrimenti, per esempio scrivendo per esteso tutti gli addendi, perché il loro numero è imprecisato.

Nei testi matematici accademici si ritrovano in genere le dimostrazioni di nuovi teoremi belle e pronte, in grado di sostenere l'assalto delle critiche mediante la sequenza di catene di implicazioni che legano le ipotesi alle tesi; non si fa invece riferimento ai percorsi che hanno portato a tali scoperte. In altri termini il moderno testo scientifico nasconde il processo creativo, si presenta sostanzialmente in modo autosufficiente e non permette al lettore di ripercorrere il cammino che ha condotto alla scoperta, diverso è quanto succedeva in passato, come si può osservare rileggendo secondo questa linea di riflessioni per esempio i testi più noti di Galilei.

La scrittura in matematica come risorsa didattica

Si può affermare senza dubbio che la scrittura sia un momento imprescindibile del fare matematica; possiamo sostenere la stessa affermazione per quel che riguarda il suo apprendimento?
Nella prassi didattica in genere si scrive, nell'ora di matematica si riempiono lavagne e quaderni, è difficile pensare di poter insegnare evitando il momento della scrittura.

È però opportuno cercare di individuare i motivi per cui viene chiesto di produrre un *testo* scritto agli alunni, per metterne in luce le peculiarità nell'insegnamento della matematica; domandiamoci quindi perché chiedere agli alunni di scrivere.
Raccogliamo alcune osservazioni che vanno a integrare quelle presentate all'inizio di questa riflessione, anche in questo caso senza pretesa esaustiva: scrivere quel che si sta elaborando aiuta ad aumentare i tempi di riflessione, il tempo stesso necessario per il gesto dello scrivere è tempo in più dedicato a quanto si sta facendo; l'opportunità di rileggere dà la possibilità di tornare su quanto si è elaborato, per riprenderlo o eventualmente correggerlo, ma anche solo per apprezzarlo maggiormente, per scoprire una nuova implicazione. Scrivere è anche un aiuto a comprendere maggiormente i processi messi in atto, giungere a una più profonda consapevolezza, fino anche a rinvenire processi migliori di quelli attuati. Per quanto riguarda invece gli aspetti legati alla comunicazione scrivere favorisce sia l'esposizione, sia l'espressione, consente di rendere più trasparente la prima e più personale la seconda, anche attraverso la sollecitazione a ricercare in modo più puntuale la precisione lessicale, contribuendo così a usare la terminologia specifica in maniera adeguata al contesto, e l'uso del simbolismo: in questo modo viene data l'opportunità ai ragazzi di sviluppare un registro adeguato.
È importante anche sottolineare che i libri di testo scolastici sono molto diversi da quelli accademici, pur presentando alcune caratteristiche comuni quali per esempio la presenza di simboli e l'univocità: anche nei primi non è ammesso che sia lasciato spazio a interpretazioni diverse. I *testi* prodotti dagli alunni, in particolare i *testi per apprendere* come il resoconto o la relazione, in genere presentano anche nella forma aspetti personali (Ho visto, ho fatto…) in contrapposizione all'impersonalità del *testo* accademico e aspetti temporali che sono assenti nel *testo* accademico; sono aspetti importanti da sottolineare, perché sono il segno che da parte dei ragazzi è in atto un processo conoscitivo per riscoprire, facendoli propri, i risultati universali. Anche questo differenzia i *testi* scolastici dal *testo* accademico: in questo infatti il processo creativo che ha portato alla scoperta dei nuovi risultati è nascosto, difficilmente è ricostruibile, mentre nel lavoro in classe quel che importa è proprio far emergere il processo, e a questo scopo la scrittura può contribuire in modo rilevante. Un ultimo aspetto, comune al *testo* scolastico e al *testo* accademico, è l'intellegibilità, i devono cioè essere comprensibili al pubblico cui sono rivolti.

Tipologie di testo della matematica scolastica

La genesi di un *testo* è in genere la risposta a una domanda che necessita o richiede una trattazione articolata; non tutte le domande danno vita a un *testo*: alla domanda «Fa freddo?» si può rispondere anche solo con una esclamazione, a differenza invece della richiesta «Racconta un'esperienza che per te è stata importante». In matematica si incontra una situazione analoga; le domande: «Quanto fa 3×8?» oppure «Quanti sono gli assi di simmetria di un rettangolo?» ammettono come risposta semplicemente dei numeri; altre domande invece come per esempio «È più esteso un cubo con lo spigolo di 5 cm o un cono equilatero con il raggio di 10 cm?» oppure «Si può ritagliare da un cartoncino rettangolare con le dimensioni di 50×70 una sagoma quadrata con il lato di 60 cm?» innescano un processo che ha bisogno di un più ampio spazio di pensiero per rispondere e conseguentemente producono un *testo*.
Soffermiamoci solo su alcune tipologie di *testo* che vengono richieste agli alunni della scuola secondaria di primo grado.

Risolvere un'espressione è scrivere un testo?
La risoluzione delle espressioni è sicuramente nell'immaginario collettivo l'esercizio che più di ogni altro sembra essere attinente al cuore della disciplina, anche perché usa un linguaggio, fatto di cifre, segni e simboli, che appartengono *solo* alla matematica. Un'espressione numerica o algebrica è una sequenza di operazioni che devono essere svolte in un ordine rigidamente stabilito. La richiesta che viene proposta da un'espressione è determinarne la soluzione cioè il risultato che si ottiene portando a termine correttamente tutte le operazioni, svolte nella giuste sequenza; in altre parole lo scopo per cui viene assegnata l'espressione è duplice: verificare la conoscenza e il rispetto delle regole di precedenza - un aspetto sintattico - e l'abilità di calcolo.

Si può affermare che lo svolgimento di un'espressione avvenga attraverso la produzione di un *testo*? È difficile pensare allo svolgimento di una espressione come a un *testo*, perché, letteralmente, non c'è una parola, e soprattutto mancano delle caratteristiche importanti: l'intenzionalità della comunicazione, la creatività, la personalizzazione, la flessibilità dell'esposizione; prevale l'aspetto deterministico, l'informazione e il contenuto sono poveri, si riducono alla diversa forma che lo stesso numero può assumere, una complessa e una semplice perché esplicita. Anche se è coeso e coerente.
Eppure qualche elemento linguistico è presente: spesso equivocato o sminuito; il segno di *uguale* tra un passaggio e l'altro costituisce un vero e proprio predicato che sta a significare «tutto ciò che è scritto prima ha lo stesso valore di ciò che è scritto dopo». La mancanza di consapevolezza del suo significato fa sì che tale segno sia omesso o svalutato: per molti ragazzi esso potrebbe essere sostituito da una freccetta a indicare un passaggio di stato.
È possibile inoltre in qualche caso riconoscere nello svolgimento di un'espressione l'impronta personale che il solutore ha voluto mettere in campo: si tratta in genere di scelte che lecitamente infrangono la sequenza delle istruzioni.

Un esempio

Consideriamo il caso dell'addizione

$$\frac{17}{34}+\frac{23}{46}$$

Applicando in maniera rigida la regola dell'addizione delle frazioni bisognerebbe per prima cosa determinare un denominatore comune che consenta di scrivere due frazioni con lo stesso denominatore, equivalenti a quelle assegnate; più opportuno in questo caso è ridurre preventivamente le frazioni assegnate ai minimi termini ottenendo così l'addizione

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

In altri termini, anche la soluzione di espressioni può mostrare da parte del solutore non solo l'acquisizione delle procedure di calcolo, ma anche la loro padronanza, ovvero la capacità di utilizzarle in maniera critica tenendo conto della particolare situazione in termini non esclusivamente puntuali, ma con uno sguardo complessivo o quanto meno più ampio. Osserviamo che in casi come questo viene richiesto di procedere a una *riscrittura del testo* in forma equivalente a quella assegnata, ovvero alla ricerca di una rappresentazione più adatta al contesto dello stesso oggetto matematico.
Considerazioni analoghe si possono estendere anche ad altri aspetti: la procedura di calcolo che viene scelta può mostrare anche la conoscenza e la padronanza delle proprietà delle operazioni. Consideriamo per esempio l'espressione:

$$\left\{\left(2+\frac{1}{3}\right)+\left[\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{7}{6}+\frac{1}{9}\right)\right]\right\}^{0}$$

Si può determinarne il risultato usando le proprietà delle operazioni e delle potenze senza svolgere alcun calcolo: poiché all'interno della parentesi graffa sono presenti solo numeri positivi il suo risultato non potrà che essere un numero positivo, che elevato all'esponente 0 dà per risultato 1.

Se risolvere un'espressione non è propriamente chiedere di stendere un *testo*, diversa è invece la richiesta di scrivere un'espressione che rispetti alcuni vincoli assegnati. In questo caso agli alunni è richiesto di produrre un *testo*, con caratteristiche di novità e originalità, il contenuto del quale, poiché l'ambiente in cui si opera è astratto, è la sintassi delle operazioni e l'uso delle parentesi. Esercizi di questo genere permettono di comprendere meglio se gli alunni hanno appreso non solo l'uso, ma anche il significato delle parentesi per modificare l'ordine di svolgimento delle operazioni. Se consideriamo per esempio la richiesta: *inventa un'espressione che abbia almeno una sottrazione, una moltiplicazione e una coppia di parentesi*, la risposta $(3 \times 7) - 18$ formalmente corretta in realtà non è accettabile, perché le parentesi che compaiono sono inutili.

Il resoconto o la relazione

Dopo aver svolto un'attività in classe, un esercizio, una serie di esercizi tra loro collegati, un problema, si può chiedere ai ragazzi di stendere un resoconto o un commento di quanto è avvenuto. Anche questi possono essere considerati *testi* matematici, sicuramente per il loro contenuto, sebbene per la forma che presentano possano essere difficilmente associabili per esempio alla risoluzione di un'espressione.
Di seguito alcuni passaggi e un commento relativi a un lavoro di Geometria, svolto sotto la guida di una collega, che ha messo a tema un percorso sulle linee come viene presentato nel testo *Matematica a sorpresa*[4]. Lo scopo del lavoro, oltre a far incontrare le diverse tipologie di linee e le loro caratteristiche, era di introdurre i ragazzi alla dimensione linguistica della Geometria, in particolare il valore della definizione. La richiesta di dare delle definizioni, non aveva ovviamente la pretesa che gli studenti arrivassero da soli alla corretta formulazione, ma aveva piuttosto l'obiettivo di accompagnarli a verificare la necessità della precisione nelle espressioni linguistiche.
La tabella raccoglie alcuni tentativi di definire le caratteristiche delle linee proposti dagli alunni.

IMPARIAMO A DEFINIRE

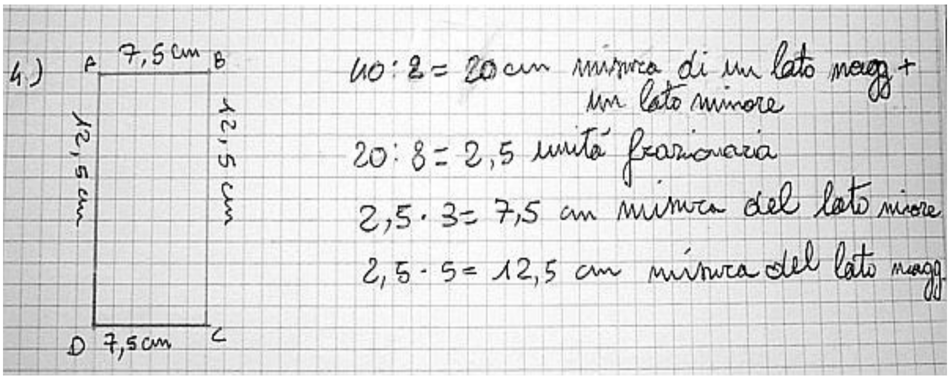
Termini	**Definizioni**
linea	è il lato e può essere di tanti tipi
spezzata curva mista	sono dei tipi di linea
chiusa	è un altro tipo di linea che può essere un tipo di forma, il cerchio
aperta	è un tipo di linea che non può essere un tipo di forma geometrica
semplice	è un tipo di linea che non può avere nodi
intrecciata	è un tipo di linea che può avere nodi
nodo	è quando una linea si intreccia
regione	è una parte di forma chiusa
poligono	è una forma geometrica : chiusa, spezzata, semplice

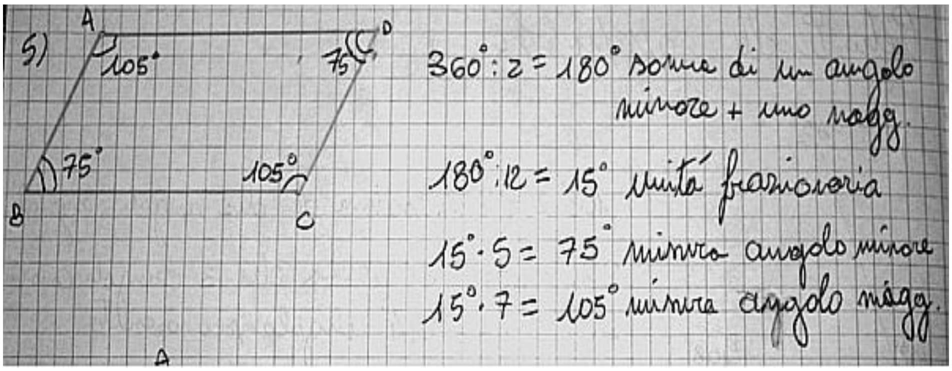
Al termine del percorso ai ragazzi è stato chiesto di scrivere un commento al lavoro che avevano svolto; uno di essi ha scritto: «Mi è piaciuto il lavoro sulle linee perché ho imparato che la Geometria è la cosa più difficile nello spiegare, nel definire le linee (di qualsiasi tipo), e ho capito che il segmento è diverso dalla linea perché la linea comprende il segmento. l'ultima cosa che ho imparato è che la linea è la cosa fondamentale di tutti gli altri tipi di linee.»
Nell'ingenuità del commento si può però riconoscere il fatto che questo alunno ha avuto l'occasione di incontrare la relazione di inclusione (*il segmento è diverso dalla linea perché la linea comprende il segmento*) e una gerarchia tra i concetti (*la linea* – ovvero il concetto di linea – *è la cosa fondamentale di tutti gli altri tipi di linee*; solo dopo aver messo a fuoco che cosa sia una linea è possibile procedere alla classificazione).
L'analisi di *testi* prodotti in queste occasioni, come abbiamo potuto apprezzare in questo esempio, permette di rilevare in modo significativo la comprensione degli argomenti affrontati; è importante lavorando su di essi far emergere il contenuto matematico, trasformando il *testo*, eventualmente creandone un altro, in modo che esso si muti da racconto dell'esperienza e dell'accaduto, alla individuazione e precisazione delle conoscenze.

La risoluzione di un problema

Probabilmente la stesura della risoluzione di un problema è la richiesta di produrre un testo matematico più importante che si incontra nella scuola. Senza entrare nel merito delle difficoltà che si possono trovare nella ricerca del processo risolutivo, cerchiamo in questo momento quali sono le caratteristiche dei *testi* che vengono prodotti nella redazione delle soluzioni. Analizziamo alcuni esempi tratti dalle verifiche svolte da alunni di seconda media; sono soluzioni dei due seguenti problemi.

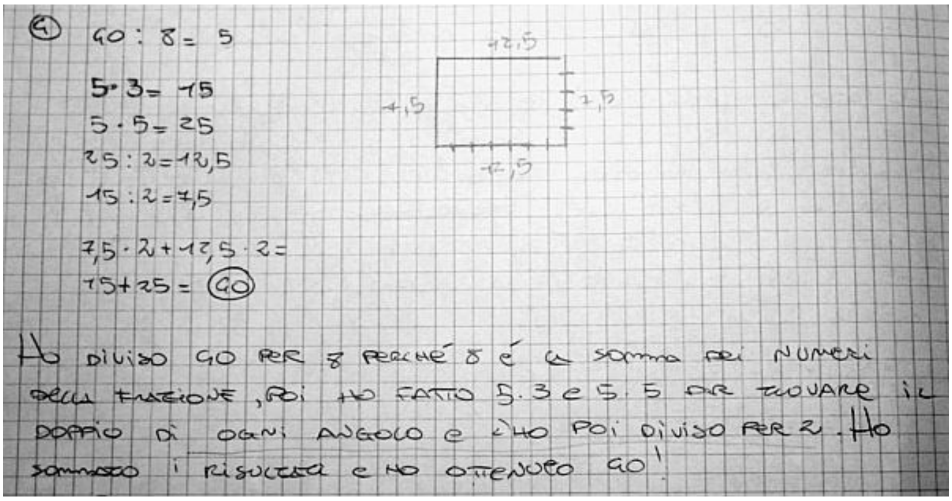
«Il perimetro di un rettangolo misura 40 cm; un lato è i 3/5 dell'altro. Quanto misurano i lati del rettangolo?»
«Un parallelogramma ha un angolo pari ai 5/7 di un altro. Quanto misurano gli angoli del parallelogramma?»
Questi esercizi facevano parte di una verifica composta da 6 problemi da svolgere in un'ora di lezione, le sole indicazioni date, relative alla stesura delle soluzioni, sono state: la richiesta di rendere possibile a chiunque di comprendere il percorso messo in atto per determinare la risposta e la richiesta di giustificare ogni elemento utilizzato che non fosse nel *testo* dell'esercizio; in altre parole è stata lasciata libera la forma della stesura, possibilità come vedremo sfruttata variamente dagli alunni, chiedendo espressamente la chiarezza dell'esposizione.
Osserviamo che i due problemi hanno un diverso livello di difficoltà per quanto riguarda la rappresentazione grafica: se è abbastanza semplice costruire un rettangolo che risponda fedelmente alle indicazioni del primo, è invece complesso costruire un parallelogramma che risponda ai vincoli del secondo. È interessante notare che quasi tutti gli alunni li hanno affrontati entrambi e chi non ha affrontato il secondo non l'ha fatto in genere per questioni di tempo; in altri termini la situazione geometrica differente non è stata un ostacolo all'analisi della situazione aritmetica.
Tutte le soluzioni presentate sono sostanzialmente corrette, ma differiscono per la redazione delle risposte, per quanto attiene alla struttura dell'esposizione e all'uso dei diversi linguaggi, verbale, grafico e simbolico.
Una prima serie di soluzioni si presenta con un'esposizione per lo più scarna e ridotta a poco più di una sequenza di calcoli: in essi si riconosce come l'unica cura prestata è la correttezza procedurale espressa quasi esclusivamente in forma simbolica, nella quale inoltre si ha una prevalenza degli aspetti numerici. I commenti verbali risultano essere una sorta di didascalie, che esplicitano solamente il contenuto del risultato dell'operazione, come si può vedere negli esempi che seguono.



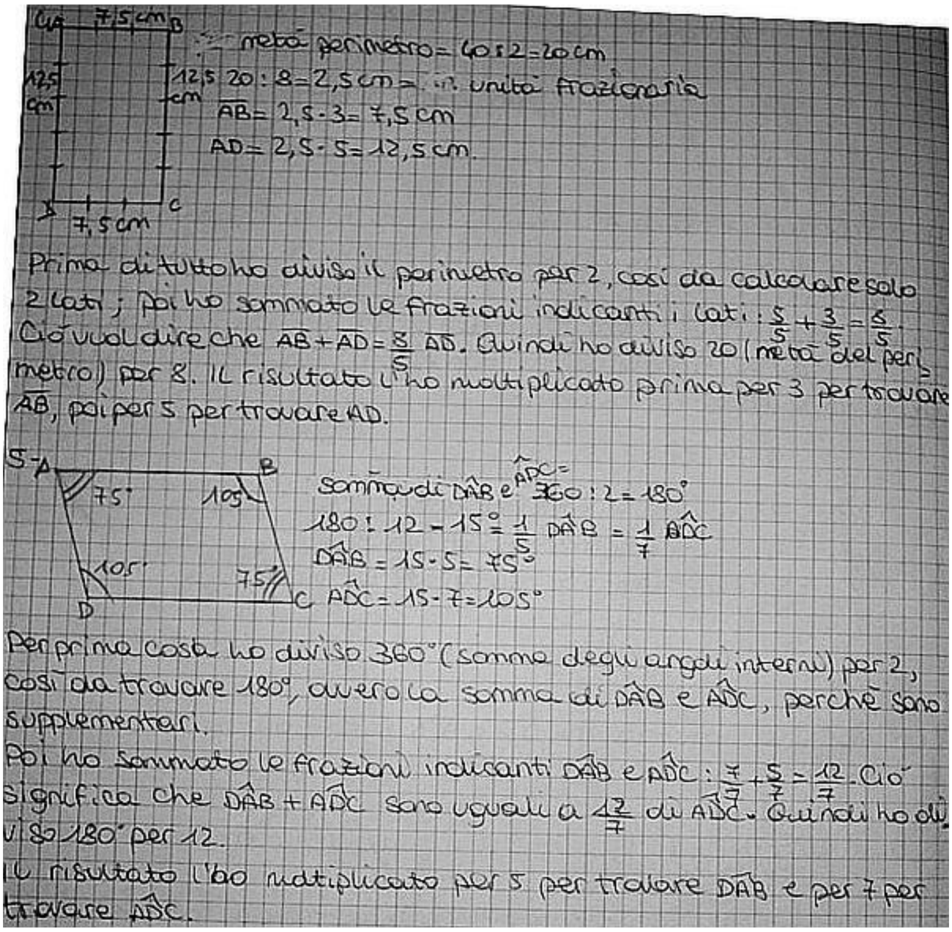


In particolare è da notare che *testi* di questo tipo rispondono solo parzialmente alla richiesta. Inoltre l'uso delle frazioni è linguisticamente passivo; ragazzi infatti mostrano di saper solo interpretare correttamente l'informazione che portano, ma non ne fanno uso nel loro *testo*, non è chiarita la provenienza del termine numerico usato per determinare il valore indicato come unità frazionaria, che è pari alla somma del numeratore e del denominatore della frazione (nel primo esempio è il numero 8 che compare nella divisione 20 : 8).

In alcune soluzioni infine la rappresentazione grafica supporta l'esposizione: si trovano disegni (si veda l'immagine che segue), che presentano il perimetro suddiviso in parti uguali, indicazione che contribuisce alla giustificazione del procedimento usato. Una seconda serie presenta procedimenti sostanzialmente analoghi a quelli della prima serie, differenziandosi anche di molto per la forma espositiva.



L'esposizione in questo caso è doppia, alla sequenza dei calcoli, che in questo esempio appaiono senza commenti, si accompagna un *testo* vero e proprio nel quale si ritrova sostanzialmente la stessa struttura della sequenza dei calcoli. Il contenuto del *testo* è concentrato solo sulla dichiarazione della procedura risolutiva, costituendone un commento che ripercorre in forma verbale i passi della soluzione già scritta; leggiamo «Ho diviso 40 per 8 perché 8 è la somma dei numeri della frazione» senza precisare il motivo per cui è necessario sommare il numeratore e il denominatore della frazione. Per questo motivo anche queste soluzioni rispondono solo parzialmente alla richiesta.



La terza serie (si veda l'immagine qui a fianco) presenta invece una vera e propria struttura argomentativa: l'uso del linguaggio è maturo, così anche l'uso delle frazioni.

Anche in questo caso l'esposizione presenta sia la forma simbolica sia la forma verbale; a differenza del caso precedente però la struttura della soluzione verbale costituisce una vera e propria spiegazione, leggiamo per esempio: «…ho sommato le frazioni indicanti i lati:

$$\frac{5}{5}+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$$

Ciò vuol dire che AB + AD = 8/ 5 AD. *Quindi* ho diviso 20 (metà del perimetro) per 8». Riconosciamo l'uso di espressioni che esprimono un legame tra le diverse affermazioni istituendo una catena di implicazioni. Osserviamo inoltre che le frazioni sono utilizzate in modo linguisticamente attivo quali mezzi espressivi per determinare i rapporti quantitativi tra le grandezze in gioco. Soluzioni di questo tipo rispondono pienamente alla richiesta.
Non a caso abbiamo messo in evidenza nelle precedenti soluzioni la presenza di elementi che non comparivano nel *testo* dei problemi: è particolarmente importante richiedere di spiegare come sono stati ottenuti tali elementi, per non lasciare spazio all'interpretazione del lettore. È questa una caratteristica che i *testi* matematici scolastici hanno in comune con i *testi* matematici veri e propri.

Inventare il testo di un problema

Infine facciamo notare come un esercizio molto interessante sia proporre l'invenzione del *testo* di un problema. In questo caso, come si vede dagli esempi riportati, si possono ricavare osservazioni più articolate rispetto a quanto può emergere dall'invenzione di un'espressione, perché l'ambito non è più solo limitato ai numeri e alle operazioni con essi, ma richiede la capacità di descrivere gli aspetti quantitativi di una situazione esaminata.

Analizziamo alcuni *testi* scritti a partire dalla seguente richiesta: «Inventa un problema che si risolve con un'espressione nella quale ci deve essere il numero 3, almeno un'addizione, una moltiplicazione e una coppia di parentesi.»

Il primo *testo* risponde in modo essenziale alla richiesta, anche se la situazione proposta non è alla portata di tutti
Giulia compra tre paia di scarpe e 10 paia di stivali. Il papà di Giulia le regala il doppio delle scarpe che possiede, ma sua sorella gliene prende 8 perché deve andare a una sfilata di moda. Quante scarpe restano a Giulia?
L'espressione risolutiva è: (3 + 10) × 2 – 8

Il secondo *testo* esprime una situazione più articolata, tenendo conto dei vincoli richiesti:
Nell'album dei calciatori 2013 trovano posto 653 figurine. Raoul riceve dal papà 7 pacchetti di 5 figurine ciascuno, la mamma gliene regala altri 12. Se a scuola, da uno scambio, ne ottiene altre 22 quante figurine mancano per finire l'album?
L'espressione risolutiva è: 653 – [(7 × 5) + (12 × 5) + 20]. In essa l'uso delle parentesi non è corretto perché le parentesi tonde inserite sono inutili; la richiesta è però sostanzialmente soddisfatta, se si eccettua l'assenza del numero 3.

Il terzo *testo* presenta una particolarità: in esso non compare esplicitamente il numero 3, che si riscontra correttamente nell'espressione risolutiva. In questo caso l'alunno ha introdotto un ulteriore elemento di articolazione nel *testo*, che richiede un passaggio di riflessione in più per descrivere correttamente la situazione con i numeri:
Giorgio compra 90 pacchetti di caramelle e 120 di cicche. Due suoi amici, a insaputa di Giorgio, comprano esattamente le stesse cose. Quanti pacchetti hanno in tutto Giorgio e i suoi amici?
L'espressione risolutiva che l'alunno ha proposto è (90 + 120) × 3, anche se in realtà sarebbe più rispondente l'espressione (90 + 120) × (1 + 2).
Non è infrequente incontrare risposte che da un punto di vista matematico possono essere accettabili, ma che risultano essere fuori dalla realtà come per esempio:
Giovanni compra 3 pacchetti di caramelle che costano 30 € l'uno e 2 pacchetti di patatine che costano 20 € l'uno. Quanto spende Giovanni?
In questo caso è opportuno chiedersi che esperienza dei numeri, e non solo, sta vivendo l'alunno.

Chiudiamo questo contributo con una riflessione di Giorgio Bolondi[5] per ribadire l'importanza del testo in matematica e suggerire al contempo piste di lavoro, anche con gli insegnanti di Italiano: «Noi insegnanti, spesso, diciamo che le difficoltà dei ragazzi in matematica sono anche, a monte, difficoltà legate al testo: fin dalla scuola primaria sentiamo le maestre ripetere che i problemi dei bambini cominciano già nella fase di decodifica del testo (e le stesse prove Invalsi sono lì a documentarlo). Questo luogo comune nasconde una verità molto più profonda e ramificata di quanto si pensi. Anche la produzione di un testo matematico (anche di un testo prevalentemente simbolico) interagisce con i processi di apprendimento e con la comprensione. L'acquisizione di una adeguata capacità di comunicazione, e con essa l'utilizzo di diversi registri di mediazione, è parte integrante dell'apprendimento della matematica. Come per l'italiano, le carenze individuate dal lavoro dell'Invalsi non sembrano solo dovute a superficialità, ignoranza spicciola o appiattimento sulle specifiche di nuovi mezzi di comunicazione: mettono invece in luce una difficoltà trasversale di organizzazione del pensiero, comune al discorso linguistico e a quello matematico.»

Andrea Gorini
(*Docente di Matematica e Scienze alla Scuola secondaria di primo grado, autore di libri di testo di Matematica*)

Note

[1] R. Duval, *Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*,1993, ULP, IREM Strasbourg, 5, 37-65, p. 38

[2] E. Rigotti, S. Cigada, *La comunicazione verbale*, Apogeo, Milano 2004, p. 57.

[3] Ibidem p. 58.

[4] A. Gorini, *Matematica a sorpresa*, *Geometria 1*, Principato, Milano 2011, Capp. 1 e 2.

[5] Giorgio Bolondi, *L'italiano manda in crisi la matematica*, www.ilsussidiario.net, 2 aprile 2012.

EMMECIquadro
Scienza Educazione E Didattica

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
www.emmeciquadro.eu

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389
Emmeciquadro (online)