EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

n. 50
settembre 2013

ELOGIO DELL'ASTRAZIONE (2)
L'interesse degli oggetti matematici

*di Marco Bramanti**

** Professore Associato di Analisi Matematica al Politecnico di Milano*

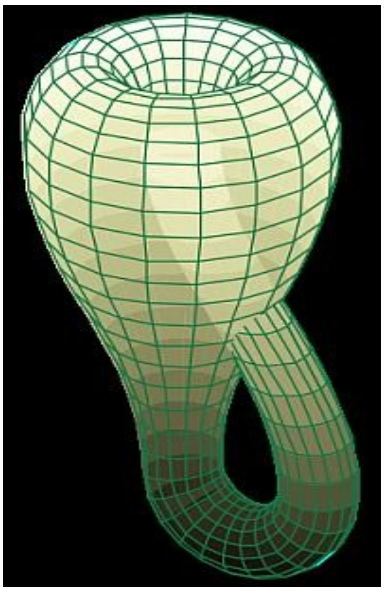
Se è vero, come afferma l'autore, che «alla radice della potenza logica della matematica sta quindi proprio la natura astratta degli oggetti matematici», qual è il rapporto con la realtà di questi oggetti? In questa seconda parte si esamina proprio questo legame, e si analizza in particolare l'uso degli oggetti matematici nell'insegnamento facendo gli esempi della geometria analitica e dell'algebra, in relazione all'introduzione e allo sviluppo del calcolo letterale.

La Prima Parte dell'Articolo è pubblicata sul n° 49 - Giugno 2013 della Rivista.

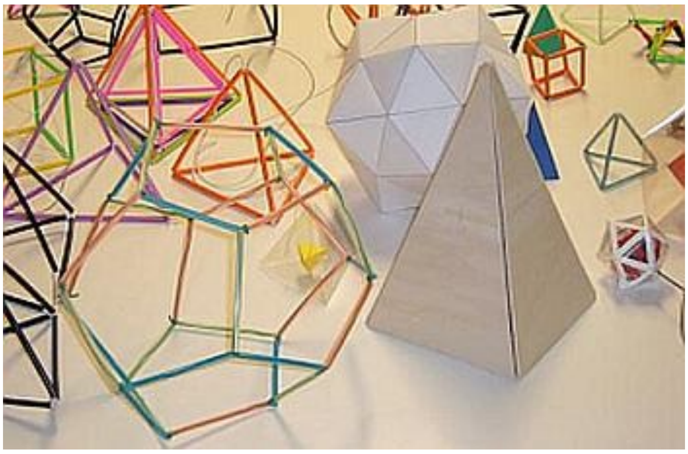
Sintetizziamo quanto argomentato nella prima parte di questo contributo: per noi esseri umani sono reali e importanti anche molti oggetti astratti.

Genesi e interesse degli oggetti astratti

Questi oggetti astratti sono stati costruiti, nel tempo, con una catena a volte lunga di successivi passi di astrazione, a partire da esperienze reali di vario tipo, condivise da molti esseri umani. Perciò gli oggetti astratti mantengono un legame «mediato» con la realtà più concreta. Questo legame mediato può a volte apparire tenue, specialmente a chi conosce poco o non è particolarmente interessato a quello specifico «mondo di oggetti» di cui si sta trattando. Tuttavia questo legame esiste. Non solo: noi possiamo sviluppare un interesse diretto per questi oggetti astratti, un'intuizione diretta su di essi, che non ha bisogno ogni volta di ripercorrere tutti i passi che radicano il loro significato in esperienze concrete. Nella misura in cui siamo consapevoli della rilevanza che questo mondo di oggetti astratti ha per noi, nella misura in cui ci interessano, essi diventano oggetti presenti nella nostra vita con una immediatezza non meno intensa, anche se di tipo diverso, da quella che hanno per noi gli oggetti concreti che possiamo sfiorare con le nostre mani. Quando seduto al mio tavolo in ufficio sto ragionando sulle proprietà di una certa equazione differenziale, l'oggetto astratto «equazione differenziale» è più reale e più interessante per me di quanto non siano molti degli oggetti concreti che si trovano chiusi nell'armadio del mio ufficio, e che in quella giornata non toccherò, non guarderò e non penserò neppure.



Si capisce allora quanto inconsistente sia l'«accusa» che viene spesso rivolta ai matematici o alla matematica da persone che non provano interesse per questa disciplina: «Tu non parli della realtà: ti occupi solo di cose astratte». Tutti noi esseri umani ci occupiamo «anche» di cose astratte, che sono per noi reali. Non tutte queste cose astratte interessano in ugual misura tutti gli esseri umani: se quasi tutti hanno un qualche interesse per il denaro, solo una minoranza di noi ha un grande interesse per la matematica, come una minoranza di noi ha un grande interesse per la giurisprudenza. Niente di male in questo, ognuno ha i suoi gusti. Curiosamente, però, molte persone non sono consapevoli del ruolo dell'astrazione nell'esistenza umana, e mentre come tutti gli esseri umani non possono fare a meno di occuparsi, magari con grande interesse, di «certi» oggetti astratti in mille risvolti della loro esistenza, a livello consapevole mantengono un pregiudizio contro l'astratto, che brandiscono a senso unico come motivo di freddezza verso alcune cose astratte che non interessano loro.



La genesi degli oggetti matematici

Approfondiamo ora il discorso per quanto riguarda specificamente la genesi degli oggetti matematici. Nel suo interessante saggio *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici* (Boringhieri, 1999), Enrico Giusti argomenta come gli oggetti matematici provengano «da un processo di oggettualizzazione delle procedure» (p.26). Così i numeri naturali nascono dall'oggettualizzazione della procedura del contare, le rette, i punti e le superfici della geometria euclidea nascono dall'oggettualizzazione delle procedure di tracciare una retta su un foglio, intersecare due rette, far ruotare una curva attorno a una retta, e così via. Si afferma quindi il radicamento degli oggetti matematici elementari in esperienze reali, ma con una sottolineatura particolare, che mi sembra appropriata, su certe procedure che noi compiamo.

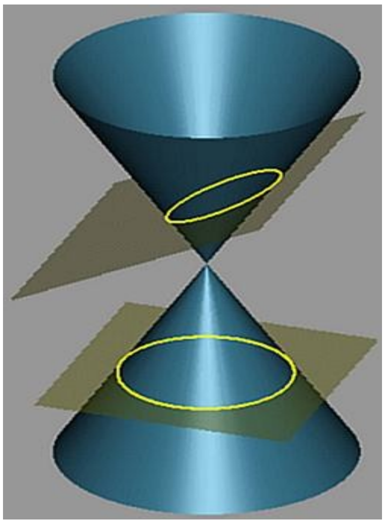
Ancora Giusti individua tre fasi nella nascita di nuovi oggetti matematici (op. cit., pp. 40-41): usati prima come «strumento di indagine» in problemi che riguardano oggetti più semplici e già «accettati» (per esempio, al nascere della geometria cartesiana, le curve algebriche sono usate per risolvere equazioni), vengono quindi promossi allo *status* di possibili e accettabili soluzioni di problemi (per esempio, un problema geometrico, consistente nella determinazione di un luogo geometrico, è considerato «risolto» se tale luogo viene determinato come una curva descritta da un'equazione algebrica), e diventano infine essi stessi «oggetti di studio», degni della nostra indagine in quanto hanno già dimostrato la loro utilità e il loro interesse.

Il matematico si occupa di «un pezzo di realtà»

La matematica e i matematici si occupano quindi di oggetti astratti ma reali come tanti altri oggetti astratti che popolano la vita e gli interessi delle persone. Occupandoci di questi oggetti, studiandoli, comprendendoli, eventualmente ricercando nuovi risultati a loro riguardo, noi stiamo per ciò stesso conoscendo un pezzo di realtà, e questo almeno in linea di principio è vero *a prescindere* dal fatto che quegli specifici risultati abbiano una immediata «applicazione concreta». Il punto è che quel mondo di oggetti astratti che chiamiamo «matematica» ha già dimostrato in mille modi il proprio significato, la propria utilità, il proprio nesso con esperienze umane e realtà concrete, per cui qualunque progresso soggettivo o oggettivo (studio o ricerca) nella comprensione delle proprietà di quegli oggetti, che risponda a una domanda significativa emersa in modo naturale dallo studio di quel mondo di oggetti, è perciò stesso una conoscenza interessante.

Gli oggetti matematici nell'insegnamento

Già, si può obiettare, ma tutto questo vale per coloro che, come si diceva, hanno una *conoscenza* approfondita e un interesse per quel mondo di oggetti astratti che sono gli oggetti matematici. Ma lo studente non ha (ancora) una conoscenza approfondita degli oggetti matematici; inoltre ognuno ha i suoi gusti, e i gusti degli studenti vanno spesso in altre direzioni. Cos'ha da dire quindi il discorso precedente sull'insegnamento della matematica? Una conoscenza si può trasmettere, ma un interesse non si «trasmette», si può al più testimoniare dandone le ragioni. Questo è ciò che idealmente dovrebbe sempre fare un insegnante: trasmettere sì delle conoscenze, ma sempre accompagnando questo alla testimonianza e al dar le ragioni dell'interesse che ha per queste conoscenze. Nel caso della matematica, l'interesse da comunicare è soprattutto quello «oggettivo», non innanzitutto quello legato al gusto soggettivo del docente, che non guasta mai, ma non può essere l'ultima parola. Per interesse oggettivo di un certo tipo di oggetti matematici intendo anzitutto le motivazioni che hanno portato a introdurre quegli oggetti e studiarli (sia in risposta alla logica interna del discorso matematico sia nell'affronto di problemi «reali», così come emerge anche dallo sviluppo storico) e quindi gli effettivi sviluppi che l'introduzione di quegli oggetti ha stimolato. In qualche modo si tratta di toccare que-

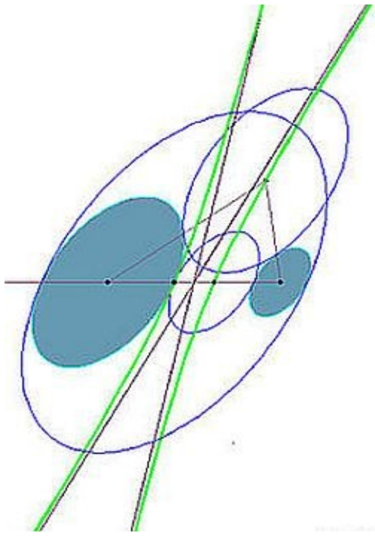


Circonferenza ed ellisse come sezioni coniche gli aspetti che citavo dal saggio di Giusti: si comincia a usare un nuovo oggetto per indagare qualcosa di già familiare, si prosegue accettando questo nuovo oggetto come possibile soluzione di un problema, si capisce infine che questo nuovo oggetto è esso stesso degno del nostro studio. Credo che invece piuttosto spesso, nell'insegnamento scolastico della matematica, l'equivoco di pensare che «finché gli studenti non sanno usare queste cose non si può spiegar loro cosa servono» capovolga il percorso naturale e decreti irrimediabilmente lo *status* dei nuovi oggetti matematici introdotti a quello di astrazioni ingiustificate e perciò slegate dalla realtà e dai nostri interessi. Se vogliamo che lo studente digerisca l'astrazione matematica e accetti con motivazioni ragionevoli la fatica del cammino, dobbiamo costruire gradualmente le conoscenze e i nessi che giustificano l'introduzione dei nuovi oggetti e l'interesse per essi. Questo non si può ridurre a qualche «cappello introduttivo» da collocare all'inizio dello studio di ogni nuovo grande argomento (geometria analitica, analisi, eccetera), ma deve tradursi in una opportuna progettazione dell'intera sequenza di argomenti e nessi che poi si insegneranno.

Facciamo un paio di esempi, senza alcuna pretesa di sistematicità, per chiarire lo spirito di queste osservazioni.

Geometria analitica

La geometria analitica nasce come strumento in più a servizio della geometria euclidea: certi problemi difficili da risolvere coi soli strumenti della geometria sintetica diventano abbordabili con queste armi in più. Non si introduce la geometria analitica solo per intersecare rette e trovare parallele o perpendicolari, cose che sapevamo già fare con riga e compasso. Occorre evitare di trasmettere quest'idea autoreferenziale delle discipline matematiche: introduciamo arbitrariamente nuovi oggetti di cui non si sentiva il bisogno (in questo caso, assi cartesiani ed equazione della retta), e poi dobbiamo imparare a usarli. Il necessario esercizio all'uso del nuovo strumento «geometria analitica» non può esimere dal mostrare motivazioni, obiettivi, vantaggi nell'uso di questo strumento, fino a mostrare concretamente almeno qualche problema significativo di geometria sintetica che con la sola geometria sintetica non si sapeva affrontare, ma che la geometria analitica permette di affrontare e risolvere. Per esempio, dopo aver definito l'ellisse come luogo geometrico (in base alla sua definizione metrica mediante i fuochi), e averne giustificata l'utilità in varie questioni (sezioni di un cono, orbite dei pianeti, eccetera), si pone il problema di determinarne la retta tangente. L'approccio sintetico appare disarmato, mentre utilizzando lo strumento analitico si riesce prima a tradurre la definizione metrica di ellisse in un'equazione algebrica e poi, a partire dall'equazione, mediante lo strumento algebrico si determina la retta passante per un punto della curva e avente un'unica intersezione con la curva stessa, cioè la retta tangente. Questo è solo un possibile esempio guida che può essere usato per introdurre, motivare e sviluppare la geometria analitica. Una volta che la consapevolezza dell'interesse di questo nuovo strumento è attecchita sarà giustificabile sia il lavoro di *routine* di «fare pratica» con i suoi metodi, sia l'affermazione che, a questo punto, è la geometria analitica stessa ad acquisire il diritto di definire autonomamente suoi propri oggetti. Per esempio, si può accennare al fatto che qualsiasi equazione algebrica in due variabili definisce una curva (magari sconosciuta alla geometria elementare), che può essere interessante studiare, anche se poi a scuola non si proseguirà su questa strada.



Iperbole come luogo dei centri delle ellissi tangenti a due ellissi date

Algebra

Questa è la disciplina che forse maggiormente soffre, a scuola, di carenza di motivazioni. Non che nella matematica scolastica manchi materiale per fornire motivazioni allo studio dell'algebra, ma l'ordine e il modo con cui tradizionalmente vengono affrontati gli argomenti rende più difficile fare leva in modo costruttivo su queste motivazioni.

L'algebra ha origine dal concetto di incognita e di equazione. Equazioni determinate in un'incognita, di primo grado e talvolta di secondo, sono uno strumento semplice ma potente per impostare e risolvere problemi geometrici, aritmetici, o di natura varia, e da lì si dovrebbe partire, introducendo il più presto possibile nel *curriculum* scolastico il concetto di equazione e i relativi principi base (quanta fatica fa lo studente alla secondaria di primo grado a risolvere con contorti ragionamenti problemi che si imposterebbero naturalmente con una semplice equazione). Il successivo passo di astrazione è l'uso di coefficienti letterali in un'equazione, o più in generale la manipolazione di «espressioni letterali». Più avanti poi si introduce la geometria analitica, facendo un altro passo, in una diversa direzione: qui l'enfasi passa sull'equazione in due incognite, che ora diventano «variabili» più che «incognite», perché l'equazione non nasce per determinare una soluzione, ma un luogo geometrico. La geometria analitica motiva lo studio dei sistemi di due equazioni in due incognite (significato geometrico di intersezione tra due rette o curve), e naturalmente fornisce una nuova, forte motivazione a saper risolvere equazioni di secondo grado (e di per sé anche di grado maggiore, anche se a scuola non ce ne si occupa). Direi che di questi tre momenti ora accennati il più delicato dal punto di vista della comprensione delle motivazioni è il secondo: l'introduzione e lo sviluppo del «calcolo letterale». Questo è il passaggio in cui è facile che si perda il contatto con le motivazioni. In effetti ci sono diverse motivazioni, a livello scolastico, per studiare un po' di calcolo letterale (sarebbe meglio chiamarla «algebra simbolica»). Le elenchiamo di seguito.

Perché il calcolo letterale

L'uso di lettere per denotare numeri qualsiasi permette di esprimere in forma generale le proprietà delle operazioni aritmetiche; viceversa, la corretta manipolazione di espressioni letterali è possibile solo una volta che ci sia consapevolezza di tali proprietà (distributiva, associativa, eccetera).

L'uso di coefficienti letterali permette di ricavare un procedimento risolutivo generale per le equazioni di primo e secondo grado, evidenziando così le ipotesi sotto le quali l'equazione ha almeno una soluzione, ne ha una sola, ne ha due, eccetera.

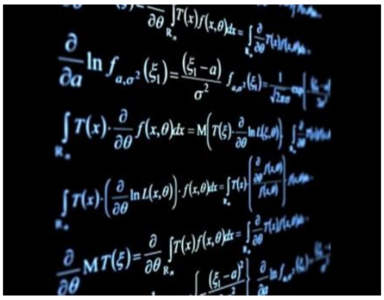
L'uso del calcolo letterale permette di evidenziare certe identità notevoli che possono essere utili a semplificare o elaborare espressioni che nascono nella risoluzione di equazioni o disequazioni (i cosiddetti «prodotti notevoli», lo sviluppo del quadrato del binomio o di una sua potenza superiore, eccetera).

$$F = ma = m\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$$

L'uso del calcolo letterale permette di scrivere formule generali in fisica o in geometria e, per esempio, ricavare da queste le formule inverse. Che si tratti di «velocità = spazio / tempo» o «volume della piramide = area di base x altezza /3» queste formule sono utili quando vengono espresse sotto forma di equazioni letterali, che usando i procedimenti standard delle equazioni possono essere «rigirate» in vari modi ricavando di volta in volta ciò che ci serve.

Ogni volta che in geometria (calcolo di aree o volumi) o in fisica si applicano formule, a certe lettere vanno sostituiti numeri dimensionati; è istruttivo che lo studente utilizzi il calcolo letterale per manipolare anche le unità di misura: per esempio, applicando la formula «tempo = spazio / velocità» è istruttivo che sia il calcolo letterale a mostrare che metri / (metri/secondo) = secondi, anziché, come solitamente avviene, eseguire il calcolo su numeri puri e «appiccicare» a posteriori l'unità di misura che si ritiene corretta.

Queste sono solo alcune delle motivazioni e applicazioni che l'algebra simbolica può avere nella matematica scolastica. Il rischio che vedo nella corrente pratica didattica è che il calcolo letterale sia sviluppato «a priori» e «indipendentemente» da queste motivazioni, insistendo su tecniche di calcolo letterale avulse dalle loro naturali applicazioni, salvo poi non sfruttare neppure a posteriori la potenza dello strumento che si è introdotto: dopo tante semplificazioni di monomi in 3, 4, 5 «lettere», nel discutere problemi geometrici o fisici si utilizzano sistematicamente dati numerici anziché parametri dimensionati («cilindro di altezza 3 cm» e non «cilindro di altezza h»), nello studio di funzione si tracciano grafici di funzioni totalmente numeriche, e mai contenenti parametri come naturalmente avviene in ogni applicazione (2·sin(3·x) e non a·sin(k·x)), e gli esempi si potrebbero moltiplicare. È chiaro che questa pratica didattica non può che instillare nello studente l'idea che l'oggetto matematico «monomio» sia un'astrazione di cui non si sentiva la mancanza, che viene introdotta per poi caricarci del nuovo fardello di studiarne le proprietà.



Qualche conclusione

Nella matematica scolastica si introducono via via diversi oggetti matematici. Pur nella loro astrattezza, si tratta di oggetti reali, lo studio dei quali aumenta la nostra conoscenza, comprensione e capacità di manipolazione della realtà. È bene che il docente per primo sia consapevole di questo. Ma affinché questo fatto possa essere compreso e stimato anche dallo studente, è necessario che nell'insegnamento la «nascita» e quindi l'inizio dello studio sistematico di ogni nuovo oggetto matematico sia l'ultimo passo di un processo che ne mostra i nessi e l'interesse in relazione a problemi che già si sono conquistati la stima e la considerazione di chi apprende. Viceversa, il metodo tradizionale «prima impariamo a usare uno strumento in tutti i suoi risvolti tecnici, poi se c'è tempo ne vedremo qualche applicazione» porta inevitabilmente gli studenti a percepire l'astrazione degli oggetti matematici come un fattore di lontananza dalla realtà, anziché come l'origine della potenza del metodo matematico. E così, tristemente, della matematica questi studenti si perdono il meglio.

Fine. Vai alla Prima Parte dell'Articolo sul n° 49 - Giugno 2013 della Rivista.

Marco Bramanti
(*Professore Associato di Analisi Matematica al Politecnico di Milano*)

EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
www.emmeciquadro.eu

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389
Emmeciquadro (online)