EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

n. 56
marzo 2015

DETERMINAZIONE DELLA DISTANZA TERRA – LUNA
Il metodo della parallasse

*di Antonella Fusi **

** Insegnante di Matematica e Fisica presso il Liceo Scientifico "Galileo Ferraris" di Varese*

L'autore, insegnante di Matematica e Fisica presso il Liceo Scientifico "Galileo Ferraris" di Varese, descrive una misura della distanza Terra-Luna realizzata con Teresa Filanti, *docente di Scienze e* Lea Gerardi, *docente di Fisica, al Liceo Scientifico (Indirizzo Scienze Applicate) "Ennio Quinto" di Gallipoli in due classi seconde.*
Il percorso descritto è un esempio della proficua e attivissima collaborazione che l'autore da alcuni anni ha avviato nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche con Davide Cenadelli, *astrofisico dell'Osservatorio Astronomico della Regione Autonoma della Valle d'Aosta.*

Il lavoro che descrivo è stato esemplificativo di un importante metodo di misura delle distanze astronomiche, quello della parallasse trigonometrica, ed è stato affascinante per noi colleghe e per i ragazzi che hanno potuto effettuare una misura non banale, quella della distanza della Luna.
Il lavoro è stato emblematico di quel modo di procedere dell'uomo nel processo di conoscenza, per il quale ciò che sembra non si possa fare apre nuove sfide e spesso porta a nuovi metodi di indagine. Nei ragazzi alla fine della seconda rimane inoltre l'idea forte che non sempre occorrono grandi strumenti per trovare (sia pure con un certo margine di errore) importanti risultati, ma che lo strumento principale è la genialità umana. Così come non si fermarono i Greci di fronte al problema delle misure nell'Universo, allo stesso modo non ci siamo fermati noi!
Come accennato, il metodo usato per la misurazione è il metodo della parallasse trigonometrica, che consiste nel misurare la distanza di un corpo identificando lo spostamento apparente di questo rispetto a uno sfondo lontano, quando osservato da due punti di vista differenti. Si tratta quindi di coinvolgere due osservatori situati in due luoghi diversi.
L'ideale è osservare la Luna contemporaneamente da due luoghi situati alla stessa longitudine, mentre la Luna è in *culminazione* per entrambi. In questo caso, il centro della Terra, le due località e la Luna si trovano su un medesimo piano, e i calcoli (vedi oltre) risultano semplificati in quanto si utilizza la trigonometria piana e non sferica.
Dato che tale condizione è difficile da rispettare alla lettera, si tratta di accettare un certo grado di approssimazione e cercare due luoghi che non siano troppo lontani da questa condizione. Tali luoghi devono inoltre distare almeno 500 – 1000 km, al fine di rendere la parallasse lunare ben discernibile (se i due luoghi sono troppo vicini, l'effetto di parallasse è trascurabile, come spiegato nel seguito).
Tenendo conto di tutte queste considerazioni e del fatto di essere già in contatto con una scuola di Gallipoli, si è ritenuto che la base Gallipoli - Varese fosse adeguata per la misura.

Il procedimento di misura

La parallasse della Luna è stata misurata osservandola contemporaneamente da Varese e Gallipoli. Indichiamo, nella *Figura 1*, Varese con la lettera V, Gallipoli con G, il centro della Terra con T e la Luna con L. Le coordinate geografiche delle due città sono, in termini di latitudine e longitudine:

Varese	Gallipoli
(lat) = 45° 49’	(lat) = 40° 03’
(lon) = 8° 50’	(lon) = 18° 03’

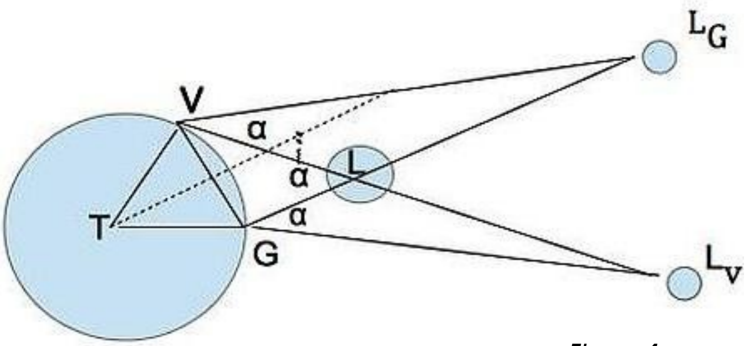

Figura 1

Dalle coordinate geografiche si calcola la distanza tra le due località usando formule di trigonometria sferica. Ma più semplicemente, si può calcolare la distanza in longitudine d(lon) e quella in latitudine d(lat) partendo dalla differenza in gradi Δ(lon) e Δ(lat) e facendo la proporzione:

$$\Delta(\text{lon}) : 360° = \text{d(lon)} : 40.000 \text{ km}$$
$$\Delta(\text{lat}) : 360° = \text{d(lat)} : 40.000 \text{ km} \times \cos(\text{lat})$$

Il termine cos(lat) nella seconda relazione serve a tener conto del fatto che la lunghezza dei paralleli decresce con la latitudine. Per calcolarlo, si può usare la latitudine media tra Gallipoli e Varese.

A questo punto si ricava la distanza tra le due località con il teorema di Pitagora che, chiaramente, vale solo in maniera approssimata su una superficie sferica ma, data la relativa vicinanza dei due luoghi, questo introduce un’approssimazione accettabile:

$$d \approx (\text{d(lon)}^2 + \text{d(lat)}^2)^{1/2} \approx 1.000 \text{ km}$$

Infine, bisogna notare che tale distanza è quella sulla superficie terrestre, mentre la distanza che serve è la corda all’interno della Terra, ma di nuovo, data la relativa prossimità dei due luoghi, la differenza tra le due lunghezze è trascurabile.
Nella Figura 1 i punti L_G e L_V indicano la posizione della Luna in cielo vista da Gallipoli e Varese rispettivamente.
Per identificare tali posizioni, e quindi lo spostamento della Luna quando osservata, nello stesso momento, da Varese e Gallipoli, ci servono due punti di riferimento sulla sfera celeste (ovvero due stelle e/o pianeti di sfondo) dato che tale sfera è una superficie bidimensionale. Gli astri scelti sono stati la stella Polluce e il pianeta Giove.
Consideriamo la Luna come un corpo puntiforme identificandola con il suo centro o un suo punto qualsiasi, dato che il diametro della Luna è piccolo rispetto alla sua distanza (circa 1/100) e che la misura che si esegue implica errori del 20-30%.
Introduciamo un’approssimazione importante: trascuriamo la differenza di longitudine tra Varese e Gallipoli, cioè supponiamo che le due città giacciano sullo stesso meridiano e la Luna culmini contemporaneamente per le due città; supponiamo inoltre che la Luna venga osservata durante la comune culminazione. In questo modo, come illustrato nella figura, V, G, T e L si trovano tutti su un medesimo piano e possiamo fare i calcoli in due invece che in tre dimensioni. Senza questa approssimazione, in generale la figura non descrive la situazione reale perché i quattro punti considerati non giacciono su uno stesso piano.
L’angolo di parallasse è, per definizione, l’angolo indicato con α. Tale angolo non è misurabile direttamente perché si trova sulla Luna, e rappresenta l’angolo sotto cui viene vista, dalla Luna, la base della parallasse. In effetti, l’angolo che si misura è un altro, l’angolo α’, che non è altro che la distanza angolare tra le due posizioni in cielo occupate dalla Luna vista da Varese e da Gallipoli.
Si ha $\alpha \approx \alpha$’ dato che le rette VL_G e GL_G (e similmente, le rette VL_V e GL_V) sono quasi parallele: esse infatti si incontrano a grandissima distanza, su una stella o un pianeta

di sfondo, che distano enormemente più della Luna. Se dalla figura la cosa non sembra evidente è perché le distanze non sono rappresentate in scala.
Abbiamo quindi fissato un giorno e un orario comune per l'osservazione (inizialmente fissata a febbraio poi rimandata perché a Varese il cielo era coperto, poi di nuovo rimandata perché le nuvole erano a Gallipoli, infine riuscita ad aprile), in cui venivano ottimizzate le condizioni per l'osservazione, cioè la Luna si trovava poco dopo il Primo Quarto in modo da essere alta nel cielo di prima sera, in ore comode per l'osservazione.
Abbiamo poi confrontato le foto fatte a Varese e a Gallipoli (le singole foto scattate a Varese si trovano al seguente link http://goo.gl/P2x3uN, mentre qui di seguito sono riprodotte due simulazioni dal software Stellarium, che sono meglio leggibili delle foto originali).
Abbiamo identificato su entrambe le foto i triangoli Luna-Giove-Polluce e ne abbiamo misurato i lati. Per la Luna si sceglie un punto identificativo, per esempio, il centro geometrico, come punto di riferimento.
Le due immagini non erano nella stessa scala perché riprese con fotocamere e lenti impostate a lunghezza focale non esattamente coincidenti. È stato quindi necessario riscalarne una, in modo che la distanza tra Giove e Polluce risulti un segmento della stessa lunghezza (in mm) su entrambe.
A questo punto, abbiamo disegnato i due triangoli Luna-Giove-Polluce su un foglio di carta millimetrata, con il lato Giove-Polluce in comune.
Il disegno è riprodotto nella Figura 3, ove L_V e L_G indicano la Luna vista rispettivamente da Varese e da Gallipoli, mentre G e P indicano Giove e Polluce (la figura forza un po' lo spostamento della Luna per evidenziarlo).
Abbiamo quindi misurato il segmento L_V - L_G in mm. Tale segmento indica quanto distano in mm le «due Lune», o meglio, un medesimo punto sui due dischi lunari scelto come riferimento, per esempio il centro geometrico. Per trasformare in gradi tale misura abbiamo misurato il diametro della Luna (in mm) su un'immagine (quella non riscalata), e, sapendo che questo corrisponde a un angolo di 0,5°, abbiamo ricavato la scala, ovvero a che angolo corrisponde lo spostamento tra le «due Lune» misurato in mm. Questo è l'angolo di parallasse $\alpha = \alpha'$.
Nello specifico del nostro caso riportiamo nel dettaglio i passi della nostra misura.


Foto da Varese


Foto da Gallipoli

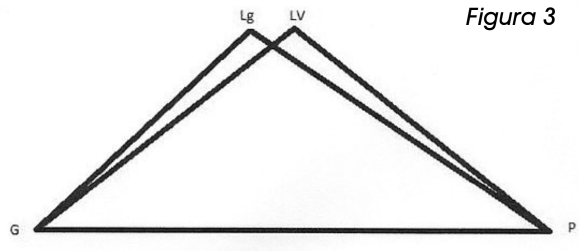

Figura 3

I passi della misura

Misurare i tre lati dei triangoli

$GL_G = 21{,}1cm$ $PL_G = 21{,}5cm$ $PG = 23{,}0cm$ (da Gallipoli)

$GL_V = 21{,}0cm$ $PL_V = 21{,}1cm$ $PG = 22{,}6cm$ (da Varese)

Portare tutti i valori alla stessa scala (in questo caso scaliamo le misure di Varese su Gallipoli)

$$GP_{Varese}/GP_{Gallipoli} = 1{,}017$$
$$1{,}017 \cdot 21{,}0 \text{ cm} = 21{,}36cm \quad - GL_V$$
$$1{,}017 \cdot 21{,}1 \text{ cm} = 21{,}6cm \quad - PL_V$$
$$1{,}017 \cdot 22{,}6 \text{ cm} = 23cm \quad - PG$$

Sovrapporre le foto e misurare la distanza tra le Lune

$$L_V L_G = 3{,}4mm$$

Trovare l'angolo di parallasse
diametro Luna : distanza tra le due lune $= 0{,}5°$: angolo di parallasse α

$$9mm : 34mm = 0{,}5° : \alpha$$

da cui: $\alpha = 0{,}19°$

La distanza Terra-Luna

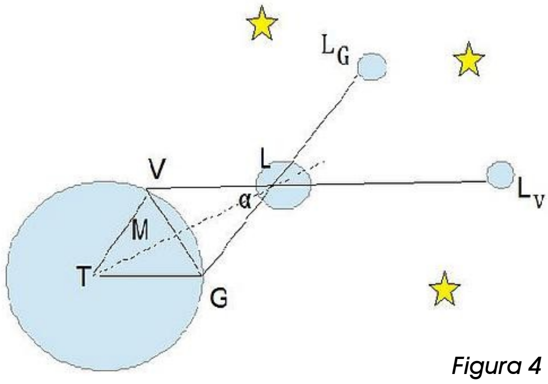

Figura 4

A questo punto possiamo calcolare la distanza Terra—Luna con la trigonometria. Indichiamo con M il punto medio di VG e rifacciamo la *Figura 1* spostando la Luna sulla traiettoria TM (*Figura 4*).
Questo perché, con gli strumenti matematici che abbiamo, per risalire dall'angolo α alla distanza abbiamo supposto che il triangolo VGL sia isoscele.
Come si evince dalla *Figura 1* perché ciò sia vero, è necessario che la Luna abbia una declinazione (= latitudine celeste) pari alla media tra Varese e Gallipoli, ovvero si trovi sulla linea tratteggiata. Questo non avviene mai, dato che la massima declinazione boreale della Luna è intorno ai 28°- 29°; in ogni caso, se la Luna è in culminazione e più a nord possibile si realizza una condizione non troppo distante da questa e, almeno in primissima approssimazione, possiamo considerare il triangolo isoscele.
L'ideale è osservare la Luna mentre culmina tra il Toro e i Gemelli, cosa che abbiamo tentato di fare, non riuscendoci, in febbraio (quindi avendo spostato per necessità l'osservazione ad aprile ciò ha aumentato il margine di errore). In questo modo il triangolo VGL è isoscele e LM è mediana, altezza e bisettrice. Dunque, considero il triangolo LMV rettangolo in M e ricavo la base della parallasse, cioè la distanza VG, usando le coordinate geografiche, delle due località. Risulta VG ≈ 1000 km e VM ≈ 500 km.
Si ha quindi:

$$VM/LM \approx \mathrm{tg}\, \alpha/2 \approx \alpha/2$$

dove α è espresso in radianti.
Sostituendo i valori di VM e α si ottiene LM = 301600 Km.
A questa misura si aggiunge il raggio terrestre (6.400Km) e si ottiene come valore della distanza Terra-Luna 308.000 km, a fronte di una distanza che in media vale 384.400 km.
Per concludere si può osservare che un errore di 70-80.000 km non è poco, ma compatibile con le approssimazioni introdotte. Si tratta di un errore del 20% circa.
Avere ottenuto tale risultato con pochi mezzi e senza concetti matematicamente complessi è un risultato notevole e dimostra ai ragazzi della seconda classe della scuola secondaria di secondo grado le grandi potenzialità della matematica, della fisica e dell'osservazione del mondo, cosa che spesso faticano a vedere visto il limitato programma che riusciamo a svolgere nel biennio.

Antonella Fusi
(Insegnante di Matematica e Fisica presso il Liceo Scientifico "Galileo Ferraris" di Varese)

EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
www.emmeciquadro.eu

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389
Emmeciquadro (online)