EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

n. 74
febbraio 2019

ERRORI SIGNIFICATIVI IN MATEMATICA

*di Anna Paola Longo **

** membro della Associazione GRIMeD -Gruppo di Ricerca Matematica e Difficoltà- e dell'Associazione MA.P.ES. - Matematica, Pensiero, Esperienza-.*

L'autrice propone un'ampia e approfondita riflessione su alcuni snodi fondamentali dell'insegnamento dell'aritmetica alla scuola primaria. Partendo dall'osservazione ripetuta del presentarsi di alcuni errori caratteristici, ricerca elementi utili per potenziare l'apprendimento della scrittura decimale posizionale dei numeri. Propone un'esperienza che, favorendo il passaggio dal concreto al pensiero astratto, suggerisce per analogia la struttura astratta che il bambino deve apprendere. Particolare attenzione è posta alla produzione di immagini, al linguaggio, all'errore e alla valutazione formativa.

Alcuni errori sui numeri e sulle operazioni, tipici delle prime classi della scuola primaria, possono permanere per molti anni ed influire gravemente sugli apprendimenti successivi. Consultando un'opera classica sulla discalculia [1] possiamo per esempio segnalare l'incapacità del calcolo mentale; l'incapacità di transcodifica, cioè l'incapacità di passare da un codice a un altro nella lettura e scrittura dei numeri; la mancanza di automazione nei calcoli, collegata all'insicurezza nell'uso corretto degli algoritmi delle operazioni in colonna; l'incapacità di usare la retta dei numeri per visualizzare i procedimenti numerici; gli errori nella selezione dell'algoritmo per la risoluzione di problemi, che segue dalla mancanza di conoscenza dei significati delle operazioni; gli errori di ogni tipo nella conoscenza delle procedure di calcolo; la mancanza della memorizzazione delle tabelline.
Penso che ogni insegnante di matematica si chieda come facilitare l'apprendimento di questi temi, classici nelle ricerche sulla discalculia, ma molto frequenti all'inizio della scuola primaria. Per procedere su questa strada, è necessario partire da alcune premesse generali:
Cosa è la matematica? per quale scopo è insegnata? Quanta parte ha, fin dall'inizio, il pensiero e quanta il calcolo? Quanto aiuta la memoria, il comprendere e quanto l'allenamento? Quanto incide sull'allievo la sensazione di non imparare o di non poter imparare e come questa è legata alla valutazione? Le risposte a queste domande nasceranno nel corso dell'articolo.
Mi spaventa che si diffonda nella scuola la ricerca di risultati formali (cioè saper fare senza comprendere i motivi) e che si affermi un'idea di facilitazione fondata sull'allenamento meccanico deprimendo il pensiero, come mi preoccupa la diffusa riduzione della matematica al calcolo.
Mi appare negativa l'enfatizzazione, per tutti, della velocità nelle prestazioni, che può invece dare segnali utili nel documentare difficoltà particolari, ma che non dovrebbe essere considerata significativa in generale, non essendo di per sé un valore per una buona matematica. Significativo il giudizio di Rosetta Zan: «Il disagio identificato con errori e lentezza non è *colpa* della matematica, ma di un

modo estremamente riduttivo e distorto di vedere la matematica, frustrante sia per l'allievo che per il docente. E di un modo altrettanto riduttivo di concepire la valutazione. È questa visione della matematica (e anche della valutazione) che dobbiamo mettere in discussione se vogliamo affrontare il problema del disagio associato alla matematica in modo costruttivo e non superficiale. Altrimenti c'è il rischio che invece di accettare errore e lentezza come elementi necessari del processo d'apprendimento, facciamo anche noi docenti scelte di evitamento: evitando occasioni d'errore, evitando processi che richiedono tempo, addirittura insegnando scorciatoie cognitive [...] Un insegnamento centrato sui processi invece che sui prodotti, che valorizza il ruolo dell'errore e del tempo e restituisce ai problemi il loro ruolo cruciale, che supera una concezione riduttiva e sterile di valutazione, [...] rende l'attività con la matematica una palestra incredibile anche per imparare a gestire le proprie emozioni, a riflettere prima di agire, ad argomentare le proprie posizioni, a rispettare le opinioni dell'altro, ad affrontare situazioni nuove con fiducia, a interpretare e superare eventuali fallimenti, ad assumersi responsabilità, a conquistare autonomia, tutto in un contesto *protetto* com'è quello della classe, o della scuola» [2].
Personalmente, propendo a pensare che per poter riconoscere con credibilità la discalculia, occorre che la didattica ordinaria abbia messo in atto tutte le sue possibilità per far superare a ciascuno gli errori che riguardano i numeri e il calcolo. Provo a ragionare su questo, facendo una sintesi di elementi utili, soprattutto metodologici.

Cosa può fare l'insegnante?

Normalmente i bambini imparano dalla prima infanzia a contare dando ai numeri i nomi della lingua comune, in un secondo momento, a scuola, imparano il sistema di scrittura dei numeri. I due codici, quello della lingua comune e quello del sistema di scrittura, sono diversi tra loro e occorre che ciascun bambino ne prenda coscienza, poiché spesso l'incapacità di controllo sul proprio operato è collegata all'incertezza sulla scrittura decimale posizionale. L'insegnante di matematica sa che deve intervenire al più presto possibile, perché gli errori ripetuti generano equivoci, convinzioni errate e un errore che si radica si trasforma spesso in *ostacolo* [3]. Una vera e propria teoria degli ostacoli che si oppongono all'apprendimento della matematica fu proposta per la prima volta da Guy Brousseau nel 1976. Di cosa si tratta? Nel processo di insegnamento-apprendimento è inevitabile che si formino idee destinate a essere transitorie, ma bisogna fare i conti col fatto che tali idee tenteranno di resistere al tentativo di superarle. Le rotture sono necessarie. Ma vi sono allora fenomeni evidenti di resistenza all'apprendimento, che occorre esaminare, detti appunto *ostacoli.* Dice Martha Isabel Fandiño Pinilla: «Si usa dire che un ostacolo è un'idea che al momento della formazione di un concetto è stata efficace per affrontare dei problemi precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla a un problema nuovo. Visto il successo ottenuto (anzi a maggior ragione a causa di questo) si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti. Tuttavia questa definizione, se ben si adatta ad alcune tipologie di ostacoli, non calza a pennello ad altri; molto più semplicemente, allora, si potrebbe dire che ostacolo è sinonimo di qualche cosa che si frappone all'apprendimento trasmissivo insegnante-allievo atteso, qualunque ne sia la natura. Un esempio. Nell'insieme N dei numeri naturali (0, 1, 2, 3, 4, 5,...) ogni elemento generico n ha un ben determinato successivo $n + 1$. Questo concetto viene conquistato in maniera implicita e naturale, senza bisogno di insegnamenti espliciti, fin dalla più tenera età; è implicito nella conta dei numeri naturali che i bambini costruiscono in modo quasi automatico tra i 2 e i 4 anni» [4].
L'oggetto matematico «successivo di un numero dato» viene appreso all'inizio della scuola primaria dove diventa conoscenza corretta e spendibile in aula assumendo spesso questa forma incompleta: «ogni numero ha un successivo». In questo modo, non si specifica che il numero a cui ci si riferisce è un «naturale», cioè un intero positivo, visto che questi sono ancora gli unici numeri che i bambini conoscono. Quando si giunge ai razionali, l'idea di successivo perde significato, ma molti bambini non se ne accorgono. Occorre avvisarli, cioè creare occasioni didattiche che li convincano

della necessità di modificare le proprie concezioni. Se l'idea persiste e viene applicata fuori dell'insieme N, allora diventa un ostacolo.
Brousseau [5] fornisce alcune caratteristiche degli ostacoli: non è una mancanza di conoscenza, ma è una conoscenza; l'allievo ha usato questa conoscenza in un contesto noto, già incontrato; se tenta di usarla fuori dal contesto noto, fallisce e genera risposte scorrette, diventando un ostacolo all'apprendimento; l'ostacolo produce contraddizioni, a cui spesso lo studente resiste; ha bisogno di una conoscenza più generale per rendersi conto della necessità di cambiare modello; anche una volta superato, l'ostacolo riappare in modo sporadico lungo il percorso cognitivo dell'allievo.
Per mettere in atto una strategia didattica, occorre identificare i punti essenziali da comprendere, talvolta nascosti, nell'argomento su cui si è svolto l'errore. Per recuperare la conoscenza, occorre assicurarsi che ciascun allievo abbia compiuto personalmente tutti i passaggi necessari (immagini mentali, collegamenti, esempi, eccetera) dandogli tutto il tempo per farlo.

Per promuovere un lavoro a partire dall'errore (trasformandolo in una risorsa didattica) l'insegnante ha bisogno non solo della conoscenza dei contenuti della disciplina, ma anche dell'epistemologia, in quanto studio critico dei fondamenti del sapere matematico. Inoltre ha bisogno di conoscere la modalità con cui si apprende e si studia la matematica con successo, e di operare una continua verifica dei passi intermedi fatti dallo studente, per decidere se i tempi sono maturi per poter procedere oltre con le esperienze e lo studio, cioè mettere in atto una valutazione formativa [6].

Qualche punto fermo

La conoscenza iniziale in matematica nasce dall'interiorizzazione e rappresentazione di azioni, di cui insegnante e allievi parlano prima con un linguaggio libero (lingua comune, disegni), operando poi un'effettiva *traduzione* nel linguaggio specifico, mediante l'introduzione di simboli e di termini specifici. In tutti gli argomenti della scuola primaria, l'inizio può essere un gioco, una situazione reale abbastanza complessa, che occorre modificare a causa di una domanda, di uno scopo. Faccio un esempio.
Se in una classe di 15 bambini si vogliono suddividere 30 caramelle, si può partire da una distribuzione reale di caramelle (o di palline di carta scelte come simboli) osservando che ogni bambino ne riceve due e non c'è resto; si può poi ragionare su cosa succederebbe se le caramelle non fossero 30, ma 35, la novità è la comparsa del resto. La situazione va poi tradotta nel linguaggio specifico che si sta imparando.
Occorre che le azioni utili alla conoscenza delle operazioni vengano conosciute attraverso esperienze significative che favoriscano la formazione di modelli mentali. La conoscenza è prima intuitiva (in atto) e successivamente esplicitata [7].
La conoscenza del significato agevola la memorizzazione di ciò che si sta inizialmente apprendendo in matematica. Come avviene questa conoscenza? Lo strumento principale per accedere ai significati è il *problema,* in cui (all'inizio e in caso di difficoltà nel calcolo) i numeri possono essere piccoli e il risultato trovato mediante disegni o artifici, come l'uso delle dita.
A mio avviso, è dannoso scindere l'apprendimento del calcolo dai problemi. Si imparerebbe un calcolo di cui non si riconoscono i significati rispetto ai contesti delle situazioni problematiche, generando la difficoltà di riconoscere quale operazione applicare in un problema; la rottura di continuità tra l'esperienza e l'astrazione si opporrebbe all'apprendimento e all'uso consapevole del calcolo. A questo punto è utile esercitare il calcolo mentale, che senza implicare difficoltà nei calcoli, permette di imparare le proprietà delle operazioni. Dopo aver compreso i significati delle operazioni, e iniziato ad eseguirle a mente o per tentativi, il passo da fare è l'apprendimento del calcolo in colonna e la padronanza nell'eseguire gli algoritmi. Questo è un passo che costa fatica e che va motivato. Per imparare a eseguire i calcoli non basta *conoscere* in modo vago i numeri! Occorre tenere conto, passo per passo, delle regole della loro scrittura e utilizzare questa sintassi mentre si eseguono gli algoritmi. Occorre quindi una continua vigilanza.

Caratteristiche della rappresentazione decimale e posizionale dei numeri

Come mai siamo tutti d'accordo nel ritenere indispensabile passare dal codice linguistico a quello indo/arabo, anche se questo passaggio è astratto e può essere difficile da apprendere? Un primo motivo è che questo codice permette di eseguire i calcoli con una certa facilità. Infatti se lavoriamo con numeri *grandi* abbiamo bisogno di uno strumento che ci risparmi tempo e fatica e diminuisca la possibilità di errore. Le operazioni in colonna sono il primo esempio di *macchina*. Esse richiedono un prerequisito: che si abbia sicurezza nella scrittura decimale posizionale dei numeri e nella capacità di passare da un codice all'altro (transcodifica). Per i bambini questo apprendimento segna il momento di un ingresso deciso in un mondo astratto pieno di convenzioni. È quindi un passaggio complesso difficile per la sua stessa natura e non è quindi un punto su cui risparmiare tempo.
Un secondo motivo è che la scrittura decimale posizionale è utilizzata in questo momento dalla nostra civiltà, sia nella cultura sia nella vita comune, quindi la sua conoscenza è un aspetto del sapere che permette di introdursi nella realtà, che è uno dei fini importanti dell'educazione.

Introduzione alla questione

Le osservazioni fatte suggeriscono criteri operativi per l'organizzazione della didattica fin dall'inizio della scuola. Per analizzare meglio il metodo, e trasferirlo poi ad altri argomenti, mi propongo di identificarne i passi su un esempio: la rappresentazione usuale dei numeri, che ci interessa anche come causa notevole di errori. L'esposizione tiene presente il ritmo naturale di apprendimento della numerazione, cioè i primi anni della scuola primaria.
La rappresentazione dei numeri è intrecciata con l'attività di contare oggetti. Per gli oggetti di un mucchio abbastanza numeroso, contare non è facilitato dalla percezione. Procedendo uno a uno, accade di dimenticare il numero a cui si era arrivati o di non distinguere bene gli oggetti già contati da quelli ancora da contare, inoltre il riconoscimento della quantità non è più aiutato da una naturale disposizione spaziale. Se rovesciamo sul tavolo un pacchetto di pasta corta, piuttosto piccola, ci accorgiamo subito che la percezione non ci aiuta più come quando si trattava di pochi oggetti. Attraverso tentativi, si guidano i bambini a scoprire un modo utile di condurre il conteggio, formando piccoli gruppi di contenuto noto e poi sommando i contenuti parziali (ci si fonda sulla conoscenza *intuitiva* della proprietà associativa dell'addizione). Si scopre poi che questo modo di procedere è facilitato se i gruppi contengono tutti lo stesso numero di oggetti e se si procede in modo iterativo formando gruppi di gruppi. Per arrivare a scrivere i numeri, occorre poi passare a *rappresentare* la modalità descritta. Esistono dunque vari livelli: un primo piano di azioni reali su oggetti reali, un secondo piano di rappresentazioni, prima libere poi codificate e con convenzioni da rispettare, in cui interviene l'immaginazione. Si lavora sempre più su immagini e schemi mentali invece che su oggetti fisici.

Da dove partire?

L'azione fondamentale per arrivare alla rappresentazione decimale posizionale è raggruppare (o inscatolare) oggetti: azione da interiorizzare attraverso l'esperienza.
L'uso comune della base 10 è un caso particolare di scrittura. In generale, si raggruppano oggetti secondo una *base*, che è un numero positivo n. Nell'azione didattica può essere un vantaggio non partire dalla base 10, ma proporre il sistema gerarchico della rappresentazione dei numeri partendo da basi diverse. I gruppi formati da 10 oggetti sono abbastanza grandi e non è facile arrivare a una visione complessiva con raggruppamenti di oggetti di ordine successivo, come è invece possibile con basi piccole. Descrivo quindi in generale il procedimento, in una base che può essere 10 o diversa da 10. Chiamo quindi n ($n > 0$) la base scelta. Il numero di oggetti di ciascun gruppo è fisso, indicato dalla base n, inoltre non si possono avere più di n-1 gruppi liberi: quando se ne aggiunge un altro e diventano n, è necessario passare di livello nel raggruppare. Esempio: scelta la base 3, tre gruppi di tre oggetti vengono nuovamente raggruppati in un raggruppamento del secondo ordine, e così via,

secondo un *procedimento iterativo*. Questo modo unitario di procedere è molto più efficace che soffermarsi sulla decina e poi *dopo parecchio tempo* sul centinaio, eccetera, sempre tornando a lavorare con oggetti concreti. Mi ha molto colpito una domanda inviatami da un'insegnante dall'America Latina: «come faccio a partire da oggetti reali quando arrivo a insegnare le decine di migliaia?». Tocca il delicatissimo rapporto concreto/astratto che non condurrebbe al pensiero e alla conoscenza senza l'intervento dell'immaginazione [8], attraverso la formazione di immagini mentali e schemi di relazioni e di azioni. Inoltre le esemplificazioni fatte con basi piccole (per esempio 3 oppure 4) permettono di dare vita a gruppi di livello abbastanza alto pur lavorando con non molti oggetti.
Per introdurre la convenzione posizionale, è comodo raccontare che nella città esiste un deposito per gli automezzi, nel quale vi sono tanti spazi disposti in rigida successione, in cui vale sempre la regola che i mezzi di ciascun tipo, quando sono liberi, non possono stare in più di n-1 (9 per il sistema decimale). Possiamo enunciare che all'estrema destra vengono sistemate le auto libere, alla sinistra di queste i camion liberi, alla sinistra di questi i treni liberi, e così via.
Si tratta quindi di trasmettere una *convenzione* che come tale non può essere scoperta, ma va comunicata agli allievi presentandone opportune motivazioni.
Entreremo nei particolari di questo procedimento in un articolo successivo.

Anna Paola Longo
(membro della Associazione GRIMeD *-Gruppo di Ricerca Matematica e Difficoltà- e dell'Associazione* MA.P.ES. *-Matematica, Pensiero, Esperienza-.*

Indicazioni bibliografiche

[1] Biancardi A., Mariani E., Pieretti M., *La discalculia evolutiva. Dai modelli neuropsicologici alla riabilitazione,* Franco Angeli, Milano, 2007.

[2] Rosetta Zan, *Errori e lentezza,* dall'Archivio di Maddmaths! Didattica, 17/3/2018.

[3] Longo A.P. (c), 2007, *Ostacoli e valutazione formativa in matematica*, in Atti III Convegno DIFIMA, Torino, *Curriculum e successo formativo in matematica e Fisica: proposte, esperienze, problemi*, Provincia di Torino

[4] Fandiño Pinilla M.I., 2015, *Difficoltà nell'apprendimento della matematica*, in: Salvucci L., 2015, *Strumenti per la didattica della matematica. Ricerche, esperienze, buone pratiche.* Milano, Franco Angeli

[5] Brousseau G.,1976, *Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques. Actes de la XXVIIIème rencontre CIEAEM,* Louvain la Neuve, 5-12 aout 1976.

[6] Longo A.P. (b), 2008, *La valutazione in matematica: un processo educativo*, in *Difficoltà in matematica*, vol.5/1, ottobre 2008, Erickson, Trento

[7] Vergnaud G., 1994, *Il bambino, la matematica, la realtà*, traduzione italiana di A.P. Longo, Armando, Roma.

[8] Fischbein E., 1992, *Concreto ed astratto nell'insegnamento della matematica elementare*, in G. Prodi, 1992, *Processi cognitivi e apprendimento della matematica nella scuola elementare*

EMMECIquadro
Scienza Educazione E Didattica

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
www.emmeciquadro.eu

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389
Emmeciquadro (online)