EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica
n. 75
giugno 2020

ERRORI SIGNIFICATIVI IN MATEMATICA (2)

*di Anna Paola Longo **

* *membro della Associazione GRIMeD -Gruppo di Ricerca Matematica e Difficoltà- e dell'Associazione MA.P.ES. - Matematica, Pensiero, Esperienza-.*

In questo secondo articolo l'autrice riprende il tema della scrittura dei numeri trattato nel primo e illustra una proposta didattica sviluppata nell'ambito del lavoro dell'Associazione Ma.P.Es. – Matematica, Pensiero, Esperienza.
L'autrice descrive un percorso attraverso esperienze che offrono elementi utili per potenziare l'apprendimento della scrittura decimale posizionale dei numeri, snodandosi negli anni della Scuola Primaria fino alla classe quinta. Particolare attenzione è posta alla produzione di immagini, al linguaggio, all'errore e alla valutazione formativa.

Nel primo articolo, pubblicato sul n. 74 di questa rivista, ho affrontato la questione degli errori sulla scrittura dei numeri nella Scuola Primaria. Tali errori, se non sono casuali ma legati alla mancanza di comprensione del sistema della scrittura decimale posizionale dei numeri, si oppongono all'apprendimento del calcolo delle operazioni in colonna: in alcuni bambini si possono generare situazioni molto difficili da recuperare. L'ottica scelta nell'articolo citato è lo studio della possibilità di prevenire queste gravi situazioni nel massimo numero possibile di allievi, altrimenti destinati a una apparente discalculia, non giustificata da cause neurologiche.
Alcune insegnanti si accorgono della difficoltà che si genera nei bambini quando si inizia a passare dal conteggio di oggetti sciolti al conteggio delle decine, che vanno considerate come nuovi oggetti, di natura diversa da quella dell'oggetto singolo, unitario, come sottolinea Gérard Vergnaud [1]. Un aspetto della difficoltà di lavorare con la decina, è che questa è un gruppo abbastanza numeroso di oggetti. Non è neanche facile rendere familiare il concetto di raggruppamento se non si riconosce la sua iterazione, cioè la ripetizione successiva del raggruppamento secondo regole che si ripetono con regolarità. Se invece della base 10, si propone di lavorare con basi piccole, come 3 oppure 4, come già accennato nel primo articolo, è possibile costruire raggruppamenti di alcuni ordini successivi utilizzando un numero non troppo alto di oggetti.
Esaminiamo la base 3.Il primo raggruppamento è costituito da 3 oggetti, ma quando si sono costruiti 3 gruppi, si è raggiunto il massimo numero di gruppi liberi, indicato dalla base, e bisogna di nuovo raggrupparli.

Posso disegnare il raggruppamento del secondo ordine in questo modo: (000 000 000). Esso contiene in tutto 9 oggetti, i 3 gruppi del primo ordine formano un solo gruppo del secondo ordine, quello racchiuso dalle parentesi.
Successivamente, 3 gruppi del secondo ordine, come quello precedente, vanno raggruppati perché sono tanti quanti indica la base, li indico così:

(000 000 000 / 000 000 000 / 000 000 000)

Questo è un raggruppamento del terzo ordine, costituito da 3 gruppi del secondo ordine, contiene $9 \times 3 = 27$ oggetti.
Si riesce ora a immaginare come prosegue l'azione del raggruppare: il raggruppamento di ordine successivo contiene: $27 \times 3 = 81$ oggetti, e così via.
Nella base 10, un raggruppamento del secondo ordine contiene 100 oggetti, uno del terzo ne contiene 1.000: per un lavoro concreto di costruzione è quindi necessario maneggiare un numero molto più grande di oggetti e uno spazio più grande.
Non voglio proporre la base 3 come un obbligo didattico, ma come una possibilità, sottolineando che poter vedere presenti contemporaneamente più passi dello stesso processo iterativo può essere una facilitazione al comprenderne il funzionamento. Passiamo ora all'esame di una proposta concreta.

Proposta didattica

Nella ricerca Ma.P.Es. [2], si introducono i bambini al raggruppamento nella seconda parte della prima classe della scuola primaria, attraverso esperienze svolte con materiale concreto per aiutare la loro intuizione, in particolare attraverso la manipolazione di un «modello concreto» che allude per analogia alla struttura del nostro sistema numerico. Esaminiamo prima l'aspetto decimale e poi l'aspetto posizionale del sistema numerico.

Aspetto decimale
Si punta a far comprendere la struttura della *base* non più a parole, ma attraverso un modello di cui «fare esperienza» attraverso situazioni problematiche. Motivando in vario modo il compito (*il sig. Terzetti sa contare fino a 3, il sig. Quattrucci sa contare fino a 4, aiutiamoli a organizzare la loro merce*), si invitano i bambini a raccogliere materiali di varia natura (fagioli, stecchini, gettoni, o altro) secondo basi piccole, come tre, quattro. Ciò permette di arrivare rapidamente, con pochi oggetti, a livelli abbastanza alti di raggruppamento. Li abbiamo calcolati per la base 3, con un procedimento analogo li possiamo calcolare per la base 4. Infatti per «sperimentare» la struttura iterativa del processo, è consigliabile arrivare almeno al terzo o quarto ordine di raggruppamento. Una condizione interessante per questa esperienza è l'esistenza del «magazzino»: la maestra (assumendo la funzione di magazziniere) chiede ai bambini di venire a consegnare la *merce* raggruppata, che può per esempio essere conservata in un armadio. Man mano che i bambini vengono a depositare sulla cattedra i loro gruppi, applicando le regole introdotte si formano nuovi raggruppamenti e cresce l'ordine dei raggruppamenti visibili [3].
Fin qui si può scegliere di agire senza scrivere nulla. Appena i bambini hanno capito come fare, si può passare alla base 10. Si inizia a utilizzare una particolare nomenclatura pensata per aiutare l'intuizione e dare senso ai vari raggruppamenti attraverso l'immaginazione: alludo alla città del dieci, già nominata nel primo articolo, in cui i vari automezzi possono circolare liberamente solo se per ciascun tipo sono meno di 10, perché la legge della città chiede che 10 mezzi dello stesso tipo vengano caricati su un mezzo di trasporto che rappresenta un ordine superiore: successivamente camion, poi treno, poi nave, eccetera [4]. Queste azioni costituiscono il raggruppamento.

Tutto questo lavoro costituisce un aiuto per la mente a predisporsi ad accettare la rappresentazione usuale, che è un mondo fatto di convenzioni e di simboli astratti. Passare a contare i gruppi invece di contare gli oggetti non è un salto facile, perché l'allievo si trova contemporaneamente di fronte a oggetti di diverso valore logico (unità libere, decine, centinaia, ecc.). Dopo che il bambino ha capito che nel raggruppare si tratta di *reiterare* un processo, è importante arricchire le immagini mentali (su cui si può più facilmente operare) introducendo un esempio in cui sia evidente l'inscatolamento). Alcune situazioni di questo tipo sono state elaborate e sperimentate nel lavoro di Adriana Davoli, un esempio è il conteggio dei soldati raccolti in decine e poi in centurie [4].

Aspetto posizionale

Per introdurre la convenzione posizionale, abbiamo già accennato che è comodo raccontare che nella città esiste un deposito per gli automezzi, nel quale vi sono tanti spazi disposti in rigida successione, in cui vale sempre la regola che i mezzi di ciascun tipo, quando sono liberi, non possono stare in più di 9. Come già affermato nel primo articolo, possiamo enunciare che all'estrema destra vengono sistemate le auto libere, alla sinistra di queste i camion liberi, alla sinistra di questi i treni liberi, e così via. Questo corrisponde all'ordine delle cifre nella scrittura di un numero.

Riflettiamo che si tratta di una convenzione e come tale non può essere scoperta, ma va comunicata agli allievi presentandone opportune motivazioni.

Per chiarire bene il funzionamento delle regole, è opportuno fare l'esercizio di introdurre una macchina per volta nella *città del dieci* e osservare ogni volta che cosa succede: niente fino a 9, poi quando se ne aggiunge un'altra scatta la legge e occorre raggrupparle facendole salire su un camion. Si crea presto una situazione problematica: quando ci sono 9 auto, 9 camion, 9 treni e vuol entrare una nuova auto che cosa succede? Intanto che si fa l'esercizio descritto, è opportuno avere a disposizione degli orologi contrassegnati con numeri da 0 a 9, e disposti in sequenza, in modo che quello all'estrema destra possa registrare le auto, quello successivo alla sua sinistra possa registrare i camion e così via. Sotto a ogni orologio verrà disposta una finestrella, che registrerà un solo numero, da 0 a 9, come se fosse un contatore digitale. Esempi di lavori svolti dai bambini sono reperibili sul sito dell'Associazione Ma.P.Es. [2].

Per arrivare alla scrittura dei numeri, l'esercizio tipo è avere certi numeri scritti in parola o in cifre, oppure rappresentati con i materiali, e chiedere per ciascun numero di *mandare ogni cifra nella sua casa* (la casa è uno schema grafico fatto di colonne affiancate, prima può essere disegnata su un grande foglio disposto sul pavimento o su un tavolo, poi diventa uno schema disegnato sul foglio del quaderno).

La richiesta così espressa in modo immaginifico, *corrisponde* a chiedere di mettere i numeri in colonna. A un certo punto si chiederà ai bambini di inventare strategie per vedere quante auto ci sono in tutto nel deposito, quante ce ne sono libere, quanti camion, eccetera. I bambini, costretti dall'esigenza di rispettare la regola di non superare il numero di 9 mezzi liberi per tipo, sono portati a *inventare* strategie che sostituiscono il trucchetto del riporto, di solito suggerito dall'insegnante, senza collegamenti con l'intuizione e i significati.

Quali tempi seguire?

Il percorso è molto delicato, vuole favorire il passaggio dall'esperienza all'astrazione e va affrontato senza fretta, impegnando la fine della prima e l'inizio della seconda. La strategia che suggeriamo è questa: in prima si parte molto lentamente, sollecitando il lavoro con i materiali per far capire di che cosa si tratta e indicando i vari raggruppamenti con termini liberi su cui i bambini si accordano. Poi nella città del 10 si passa a introdurre pian piano il linguaggio convenzionale di quel gioco, con i suoi simboli e con i suoi significati. Ancora senza fretta, curando che il linguaggio sia proposto per esprimere situazioni conosciute e cariche di significato per il bambino.

In seconda si introducono i termini «unità, decine, centinaia, ...», sostituendo pian piano (senza mai proibizioni) i termini fantasiosi di «auto, camion, treno, ...», e man mano sostituendo l'uso dei materiali concreti con il riferimento alle immagini mentali (naturalmente si lasciano liberi i bambini di rispettare ciascuno il proprio tempo personale).
Questo può essere il momento per iniziare a scoprire come si compongono e si scompongono i numeri interi con addizioni e sottrazioni (perciò usando intuitivamente le proprietà delle operazioni), divertendosi a scoprire regolarità e coincidenze particolari, in modo da favorire apprendimenti che lancino l'interesse per il calcolo mentale.
Vale la pena di lasciare che i bambini possano liberamente accedere al materiale, ma sfidandoli anche a non usarlo, per imparare a fare riferimento alle immagini mentali che devono costruire. Insistere troppo a lungo sul materiale fa diventare tutto il lavoro più lento, mentre è necessario renderlo via via sempre più agile. Fondamentale è la capacità dell'insegnante di osservare gli allievi mentre lavorano e valutare da gesti, parole, rappresentazioni il loro «stato» di apprendimento.

Numero e cifra: la funzione dello zero

Una volta accettata la convenzione sull'ordine (posizione), si vede bene come numero e cifra siano due oggetti diversi. Si utilizza la cifra zero per indicare la mancanza di un gruppo; per esempio, avendo solo un gruppo da 1.000 e 7 unità sciolte, si scriverà $1000 + 7 = 1.007$. S'imparerà successivamente, nella scuola secondaria, a scrivere i numeri naturali in forma polinomiale utilizzando le potenze di 10, in cui le cifre che compongono il numero diventano i coefficienti del polinomio:
$1.007 = 1000 + 7 = 1 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 7 \times 10^0$
(si ricordi che $10^0 = 1$). Riconoscere la funzione dello zero come indicatore di uno spazio non utilizzato è un momento fondamentale per dare senso a questo simbolo, che risulterebbe un po' artificioso se lo si introducesse solo come cardinale al momento di contare, dove significherebbe contare gli elementi di un gruppo che non contiene niente e questo potrebbe essere davvero contrario all'intuizione.

Arrivare alla padronanza nell'uso

Come sempre in matematica, per imparare occorre capire, ma non basta! Infatti la prima conoscenza si deve trasformare in padronanza. Bisogna fare parecchi esercizi di passaggio da una rappresentazione a un'altra per far emergere lo schema al di là dei materiali usati. Bisogna imparare a immaginare la disposizione di oggetti in gruppi di vario ordine e dalla manipolazione di oggetti passare a estrarre la struttura [1].
Per le esperienze si può utilizzare una grande quantità di materiali: chicchi di mais, fagioli, stuzzicadenti, eccetera; occorre poi il ricorso didattico alle rappresentazioni sul quaderno, alla narrazione (raccontare le attività svolte), alla sintesi, alla discussione con i compagni, all'approfondimento linguistico.
L'abaco è utile come strumento di riepilogo: gli anelli sarebbero indistinguibili se non fosse per la posizione del piolo su cui vengono infilati, quindi questo strumento non facilita l'intuizione. Ricordo che sull'abaco nella sua forma originale non compaiono colori, gli anelli acquistano la loro funzione solo per la posizione.
Esistono materiali utili predisposti per il recupero di questi concetti e di queste abilità [5]. Suggerisco però di non affidarsi solo ai materiali predisposti, ma di ricostruire con i bambini le esperienze che forse non hanno svolto o non hanno interiorizzato: per collegare il calcolo al suo uso nei problemi, infatti, i semplici oggetti utilizzati devono essere pensati come rappresentanti simbolici di oggetti che si collocano in contesti vari, esperienziali.

Linguaggio

Anche per il linguaggio è opportuno adottare una regola di valore generale: un nome è significativo quando è noto l'oggetto che rappresenta. Quando i bambini iniziano a compiere azioni (vere, personali) di raggruppamento, non sanno dove li condurrà l'esperienza che stanno facendo; per questo è meglio iniziare a denominare i gruppi successivi con nomi liberi, stabiliti dai bambini della classe. Quando lo schema di costruzione si è consolidato ed essi possiedono nuovi oggetti mentali, la maestra introduce la convenzione di uso comune e i bambini passano dai nomi da loro stabiliti a quelli ufficiali (unità, decina, centinaio, …) attraverso un periodo di allenamento all'uso, rendendosi conto dell'esistenza di convenzioni nate nella storia.

Correzione degli errori e recupero

Gli errori sono inevitabili, l'interesse dell'insegnante non è tanto evitarli, quanto «renderli una tappa positiva» per l'apprendimento. Questo si può ottenere solo generando nel bambino un lavoro di ripensamento e approfondimento.
Una strategia importante è segnalare l'errore senza fornire la versione esatta, ma chiedendo di giustificare il procedimento elaborato usando semplicissime parole o disegni. Ci mettiamo insieme al bambino alla ricerca dei motivi, provocando l'approfondimento con domande incisive: si attendono le risposte e si invita il bambino a riprovare, finché si riesce a mettere a fuoco la questione [6].
Per le operazioni, la conoscenza delle regole di esecuzione si costruisce via via, operando prima su quantità manipolabili e utilizzando le proprietà delle operazioni *in atto*, senza teorizzarle. Perciò nella sua spiegazione, il bambino può riferirsi anche a questa fase iniziale. Si raccomanda di non saltare il passaggio della *scrittura in riga* delle operazioni, in cui si può meglio curare che il bambino faccia esperienza intuitiva delle proprietà, come per esempio nel calcolo:

$$\begin{aligned}1.350\times 27 &= 1350\times(20+7) = \\ &= 1.350\times 20 + 1.350\times 7 = \\ &= 1.350\times 10\times 2 + 9.450 = 13.500\times 2 + 9.450 = 27.000 + 9.450 = 36.450\end{aligned}$$

Valutazione

Quanto detto sulla correzione, esplicita il fatto che una funzione caratteristica della valutazione è indicare a ciascun allievo la via che deve prendere per superare quel particolare errore [7]. Siccome il salto cognitivo lo deve fare l'allievo, è utile che egli sia coinvolto in modo attivo, quindi un modo molto efficace per elaborare conoscenza risulta essere una *correzione interattiva*, dialogata, fatta di domande dell'insegnante e di risposte dell'allievo. Può essere fatta con un singolo allievo o diventare una discussione in classe. Può essere una conversazione o un dialogo scritto sul quaderno.
Nel giudizio valutativo giocano certamente le convinzioni dell'insegnante, il quale però non deve limitarsi a impressioni o a schemi, ma soprattutto indagare e incidere sulle cause. Per esempio, la velocità di esecuzione non è un valore per la matematica, ma può diventare una questione importante per il singolo allievo se si stanca inutilmente e resta indietro nei calcoli e nel seguire il programma. Ciascun insegnante per ciascun allievo saprà quale peso dare alla memorizzazione, per esempio, delle tabelline, quindi anche quanto tempo aspettare, quali immagini usare per favorire le immagini mentali e gli artifici che sostengono la memoria. Questa riflessione sarà utile non solo per i discalculici, ma per tutta la classe.
Dopo la correzione, occorre un nuovo esercizio e una nuova verifica. Esistono errori radicati e persistenti, chiamati *ostacoli* nella didattica della matematica, di cui ho

parlato nel primo articolo. Essi entrano normalmente nel processo di costruzione della conoscenza, c'è un unico modo per superarli, scontrarsi con essi, superarli e prendere coscienza dei propri limiti [8]. Occorre che non si abbia paura di sollecitare gli allievi a un lavoro intenso, sfidandoli realmente a mettersi alla prova.

Un'esperienza di recupero: cifre e numeri in quarta

Racconto ora come si è mossa un'insegnante di Milano, quando ha notato nelle prove di ingresso alla classe quarta la persistenza di errori sulla struttura del numero.
Questo è stato il quesito che ha creato problemi:

Quante decine ci sono nel numero 8.415? E quante centinaia ci sono?

Alcuni rispondono in modo errato indicando la cifra che indica la posizione (1 nel primo caso e 4 nel secondo), altri, che hanno risposto correttamente, non riescono a spiegare chiaramente la risposta data. L'insegnante affronta il recupero, facendo usare i materiali utilizzati in passato, ma senza riuscire a sbloccare definitivamente la situazione. Riprendendo una pagina del sussidiario (conservato in aula dentro un armadio), chiede a un bambino di scrivere il numero 45.758 *come somma di numeri*: lui scrive sulla lavagna:

$$4 + 5 + 7 + 5 + 8.$$

Ne nasce una conversazione in cui i bambini si aiutano a riconoscere come stanno le cose, la riporto per la sua significatività (M. indica la maestra):

B.: *ah, adesso ho capito!*

M.: *Cosa hai capito?*

B.: *Che lui con quell'addizione non ha scritto il numero che doveva scrivere, ma il numero 29; ho visto che lui pensa come pensavo io che i numeri sono le cifre…*

Si arenano però nel confronto tra cifre e numeri.
La maestra fa rileggere la filastrocca delle cifre scritta sul quaderno della prima elementare e, dopo la lettura, riescono a spiegare:

B.: *Ho capito: le cifre servono per scrivere i numeri, come le lettere dell'alfabeto servono per scrivere le parole*;

B.: *è vero! Infatti le cifre sono dieci e i numeri infiniti; e con le cifre si possono scrivere tutti; solo che fino a nove le cifre valgono anche per numeri;*

M.: *e allora cosa vuol dire scrivere un numero come somma di numeri?*

B.: *secondo me vuol dire scrivere i numeri che le cifre significano: otto unità quindi 8, più cinque decine quindi 50, più sette centinaia quindi 700, più questo cinque, che è nelle unità di migliaia quindi 5.000 - vedi maestra che questo cinque non è lo stesso numero di prima?- più quattro decine di migliaia quindi 40.000. Vedi che è lo stesso numero? Invece nell'altra addizione il risultato è 29 e si capisce che non è lo stesso numero.*

Scrivono sul quaderno la distinzione tra cifra e numero. Un bambino aggiunge che la cifra è come il dado sull'asta dell'abaco, *vuol dire un numero, secondo il posto dov'è.*
Tornata a casa, la maestra consulta il dizionario di Stella Baruk [9] e comprende meglio ciò che è successo ai suoi alunni: un'ambiguità linguistica si è posta come ostacolo all'acquisizione del concetto.
«*Nella lingua corrente, la parola cifra è impiegata come sinonimo di numero, il che produce in Claude confusioni inestricabili […] Come fare allora per distinguere il numero delle decine in 257 (sono 25) dalla cifra delle decine (è 5)?; che cosa vorrebbe* dire "un numero di tre cifre"? [...] Non si può rendere asettica la lingua ma in classe è indispensabile, almeno separare rigorosamente gli impieghi di cifra e di numero e

dire “un numero di tre cifre”? [...] Non si può rendere asettica la lingua ma in classe è indispensabile, almeno separare rigorosamente gli impieghi di cifra e di numero e individuare, ogni volta che è possibile, gli impieghi corretti nell’uso corrente» [9].

Anna Paola Longo

(membro della Associazione GRIMeD -Gruppo di Ricerca Matematica e Difficoltà- e dell’Associazione MA.P.ES.—Matematica, Pensiero, Esperienza-).

Indicazioni bibliografiche

[1] VERGNAUD G., 1994, *Il bambino, la matematica, la realtà,* edizione italiana a cura di *P.* LONGO, Roma, Armando.

[2] Ma.P.Es (Matematica, Pensiero, Esperienza), Associazione per la ricerca didattica e la formazione degli insegnanti, sul sito *www.ma-pes.it*

[3] LONGO P.& BARBIERI S., 2008, *Insegnare matematica. Esempi di Buone Prassi in Lombardia*, Milano, Guerini e ass.

[4] DAVOLI A. & ALII, 2009, *Il curricolo per competenze dalla scuola dell’infanzia alla scuola primaria: un’esperienza realizzata,* Roma, Armando.

[5] RIPAMONTI I., 2012, *Prevenzione e trattamento delle difficoltà di numero e di calcolo. Attività e materiali per terapisti, insegnanti e genitori,* Trento, Erickson.

[6] LONGO P.& BARBIERI S.& DAVOLI A., 2005, *Correzione: un processo interattivo tra allievo e docente*, In: A. DAVOLI & R. IMPERIALE & B. PIOCHI & P SANDRI, *Alunni, insegnanti, matematica (progettare, animare, integrare)*, Bologna, Pitagora.

[7] LONGO P., (b), 2008, *La valutazione in matematica: un processo educativo,* In: *Difficoltà in matematica,* vol. 5/1, ottobre, Trento, Erickson.

[8] CHAMORRO C., 2003, *Didàctica de las Matemàticas para Primaria*, Madrid, Pearson Prentice Hall.

[9] BARUK S., 1998, *Dizionario delle matematiche elementari*, [ed. it.], F. SPERANZA & L. GRUGNETTI, Bologna, Zanichelli.

EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
www.emmeciquadro.eu

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389
Emmeciquadro (online)