EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

n. 75
giugno 2020

DALL'IMPLICITO ALL'ESPLICITO, DAL FENOMENO ALLA LEGGE

*di Rita Mantegazza**

** Già docente di Matematica presso la Scuola Secondaria di primo grado "San Tommaso Moro" della Fondazione "V. Grossmann".*

Il lavoro illustrato in queste pagine è un significativo esempio di metodo didattico sia per la Matematica sia per le Scienze sperimentali. Esso propone un percorso di avvicinamento all'algebra all'inizio della terza media, che pone l'accento sulla comprensione del significato delle formule algebriche in sé e nel loro rapporto con i fenomeni fisici. È un percorso esemplare in quanto mostra le potenzialità dell'algebra non solo come insieme di procedure ma, in primo luogo, come nuovo linguaggio che gli alunni incontrano in modo costruttivo e significativo. Un esempio completo di reinvenzione guidata.

Per un Open Day della scuola, insieme alla collega Anna Maria Giuliano che insegnava Scienze, abbiamo realizzato una mostra che descriveva un percorso di introduzione all'algebra, svolto in una classe terza. Il percorso era scandito in tre sezioni:

- *dal testo alla relazione algebrica e al grafico;*
- *dal grafico alla relazione algebrica: approfondimento sulla proporzionalità diretta;*
- *dalla relazione algebrica al testo.*

Verso l'algebra: simboli, linguaggio e grafici

Lo svolgimento complessivo delle attività ha portato, partendo dall'analisi del testo di un problema, a ritornare a un testo, di cui i ragazzi si sono fatti autori: ciò ha suggerito la disposizione circolare della mostra.
La prima parte del percorso, della durata di circa due settimane di scuola, ha avuto avvio dall'analisi di una semplice situazione problematica:

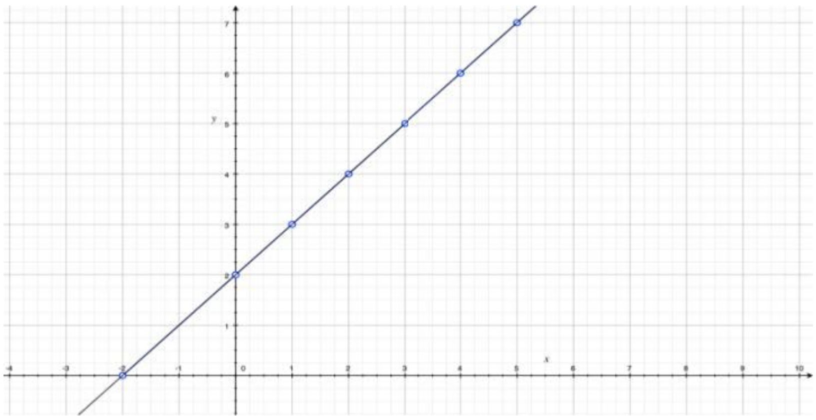
- *Serena desidera comperarsi uno smalto. In tasca trova 2 euro, e per arrivare alla cifra necessaria, decide che dall'indomani inizierà a risparmiare 1 euro al giorno.*

Nel testo mancava una domanda esplicita: ciò ha generato un iniziale disorientamento nei ragazzi, poi alcuni hanno proposto di descrivere la situazione usando caratteri matematici. Hanno osservato che il testo parlava di grandezze variabili e di grandezze che non variano ovvero costanti, e hanno cercato di esprimere a parole la relazione che le legava, giungendo a formularla così: «i soldi risparmiati da Serena sono uguali al numero dei giorni più due».

A questo punto, per esigenza di sinteticità e per comodità di scrittura, sono passati a «etichettare» le due grandezze, indicando i *soldi* con la lettera y e i *giorni* con la lettera x. Questo passaggio non è stato suggerito, ma ritrovato spontaneamente, frutto del lavoro dei primi due anni, in cui i ragazzi erano già stati introdotti all'uso delle lettere per indicare quantità variabili, in contesti semplici ma significativi.

X	0	1	2	3	4	5	…
Y	2	3	4	5	6	7	…

Si è passati quindi alla realizzazione sul piano cartesiano del grafico che rappresentava la situazione. Per coerenza rispetto al testo del problema, inizialmente è stato disegnato solo l'insieme dei punti che soddisfacevano la relazione, per la quale il dominio della variabile x è l'insieme dei numeri naturali.
Si è poi passati a una prima generalizzazione, congiungendo tali punti mediante la semiretta con origine nel punto (0;2), passando poi a tracciare la retta nell'intero piano cartesiano.



Tale operazione non è stata fatta «sottobanco», ma sottolineando ai ragazzi l'azione di generalizzazione, che portava a rappresentare un grafico «oltre» il problema, qualcosa di più dell'insieme dei punti che rispondevano alla situazione concreta presentata dal testo iniziale.

Prepariamo la mostra in tre parti

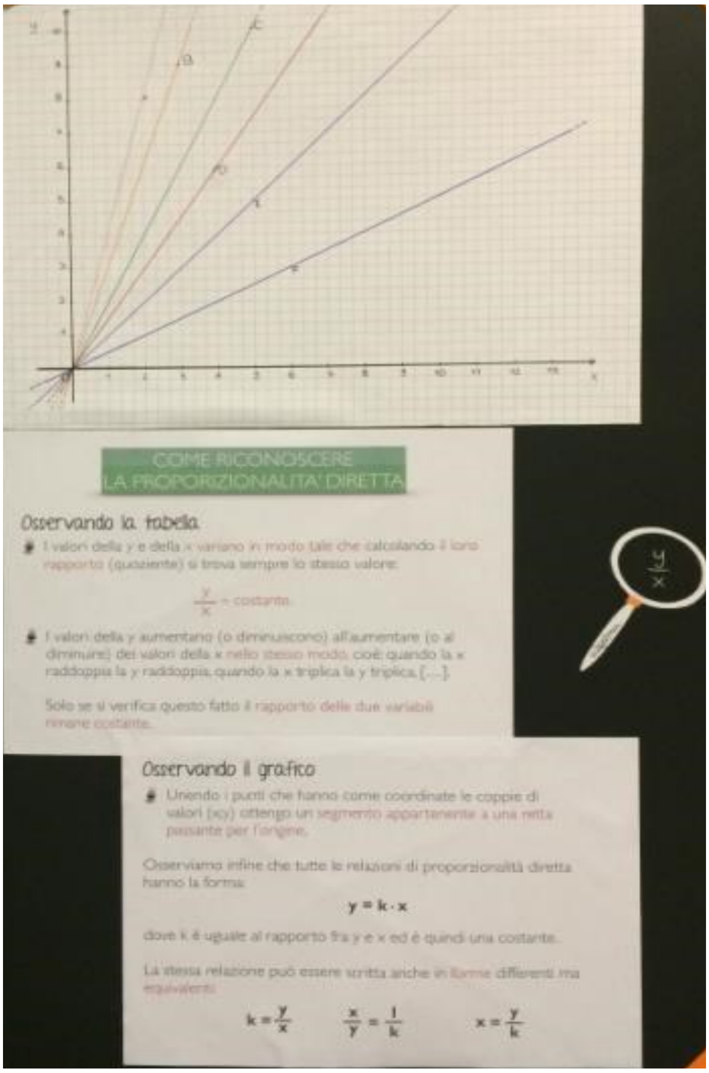
Dal testo alla relazione algebrica e al grafico: focus *su alcuni problemi*
La ricchezza di stimoli emersi dal lavoro sul semplice problema iniziale, ha suggerito di rielaborare quanto emerso, usando altri problemi, in modo da sviluppare il processo adottato e consolidarne la consapevolezza. Perciò è stato guidato e svolto lo stesso tipo di lavoro su dieci situazioni problematiche analoghe.

- Filippo ha un block notes con 32 fogli. Ogni giorno usa un foglio. Al passare dei giorni quanti fogli gli rimangono?
- Tommaso si mantiene in forma correndo ogni giorno per 2 km. Quanta distanza percorre complessivamente al passare dei giorni?
- Un gruppetto di amici organizza una gita che costa 15 euro a persona. Stabilisci quale cifra deve essere raccolta in funzione del numero di partecipanti. Che tipo di relazione hai trovato? Perché?
- Paolo acquista un fumetto a uscita mensile al prezzo di 2 euro. Scrivi la relazione che rappresenta la situazione.
- Lucia per recarsi a scuola usa i mezzi pubblici e acquista un abbonamento settimanale che costa 9 euro. Scrivi la relazione che rappresenta la situazione e rappresentala nel piano cartesiano (attenzione alle unità di misura!).

- La mamma di Giuseppe cucina sempre 70 g di pasta per ciascuno dei commensali. Stabilisci quanta pasta deve cucinare in funzione del numero di commensali. Se ha cucinato 1470 g di pasta, quanti commensali siedono intorno al tavolo?
- Lorenzo ha nel salvadanaio 20 euro. Ogni settimana la mamma gli dà 5 euro; ogni sabato Lorenzo va a prendere il gelato spendendo 2 euro. Esprimi con una relazione la situazione.
- Irene compera dal cartolaio un quaderno che costa 3 euro e delle penne che costano 1 euro ciascuna. Al variare del numero di penne acquistate esprimi la relazione che rappresenta la situazione. Quanto spenderà Irene se acquista 5 penne? E se ne acquista 8? Puoi ricavare queste informazioni dal grafico? Come?
- Considera un rettangolo e costruisci un rombo unendo i punti medi dei lati del rettangolo. Che relazione sussiste tra l'area del rombo e l'area del rettangolo di partenza? Disegna il grafico relativo.
- Dato un quadrato, costruisci un rettangolo aumentando un lato del 50% e diminuendo l'altro del 20%. Che relazione sussiste tra il perimetro del rettangolo così ottenuto e il lato del quadrato di partenza? Disegna il grafico relativo.

In questi testi ci sono domande esplicite, che hanno guidato l'analisi delle varie situazioni da diversi punti di vista. È stato interessante osservare come variazioni nella situazione descritta anche piccole e semplici, possano presentare complessità per i ragazzi. Per esempio, nel caso del problema 1, apparentemente del tutto simile a quello già elaborato, non è stato semplice per tutti esprimere la relazione nella forma $y = 32 - x$; solo alcuni alunni hanno spontaneamente identificato il numero dei fogli e il numero dei giorni (variabile x). La comprensione è stata facilitata dall'esprimere la relazione nella forma $y = 32 - 1x$, scrittura più trasparente.

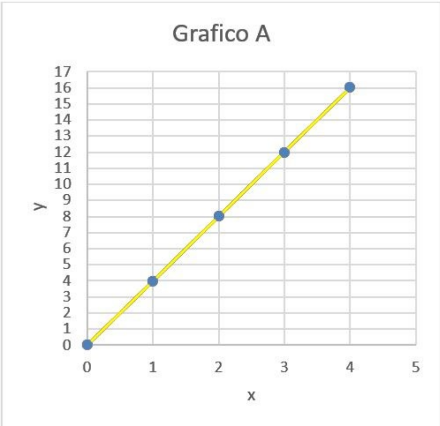
- Nel lavoro di analisi dei problemi, ci si è accorti che alcuni presentavano analogie (in essi, infatti, le relazioni sono di proporzionalità diretta). Si è passati allora a indagarne le caratteristiche comuni, osservando le tabelle dei valori delle variabili. I ragazzi hanno raccolto importanti osservazioni, come per esempio:
- i valori della y e della x variano in modo tale che, calcolando il loro rapporto (quoziente), si trova sempre lo stesso valore: y/x = costante;
- i valori della y aumentano (o diminuiscono) all'aumentare (o al diminuire) dei valori della x nello stesso modo, cioè: quando la x raddoppia la y raddoppia, quando la x triplica la y triplica, eccetera;
- solo se si verifica questo fatto il rapporto delle due variabili rimane costante.

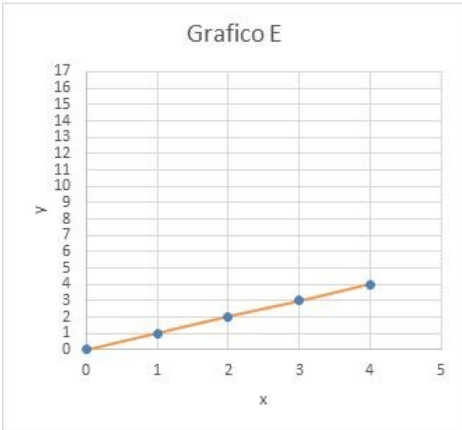


In un secondo momento, tracciando e osservando i grafici corrispondenti a ogni relazione, i ragazzi hanno scoperto come fosse vero per tutte che «unendo i punti che hanno come coordinate le coppie di valori (x;y), si ottiene un segmento appartenente a una retta passante per l'origine».
Solo a questo punto si è dato il nome a queste relazioni, che sono state chiamate «relazioni di proporzionalità diretta», e si è osservato che esse hanno sempre la forma: $y = k{\cdot}x$, dove k esprime il valore del rapporto fra y e x, ed è quindi una costante. Gli alunni hanno poi anche ricavato che queste relazioni possono essere scritte in forme differenti, ma equivalenti alla prima:

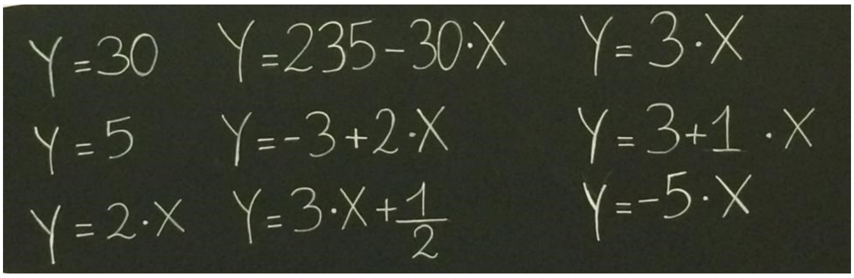
$$k = \frac{y}{x} \qquad \frac{x}{y} = \frac{1}{k} \qquad x = \frac{y}{k}$$

In senso inverso: dal grafico alla relazione algebrica.
Forti delle conquiste fatte, in questa sezione è stato chiesto ai ragazzi di interpretare grafici cartesiani di rette, riconoscendo dal rapporto fra le coordinate di due punti arbitrariamente scelti sulla retta quale relazione di proporzionalità diretta rappresentasse, arrivando a scriverne la relazione in forma algebrica.
Gli alunni hanno lavorato su sei grafici, accuratamente riportati sui quaderni; ne riporto come esempi tre:





Dalla relazione algebrica al testo
Nell'ultimo passaggio «in senso contrario» previsto dal percorso, sono state assegnate le seguenti relazioni espresse in forma simbolica:



I ragazzi avevano il compito di farsi scrittori di testi in cui fossero descritte tali relazioni. Tutti hanno eseguito i compiti ma l'interessante è stato lavorare su alcuni dei testi inventati, che erano *errati*: le due ore trascorse sulla correzione sono state un momento di lavoro intensissimo e molto partecipato, perché spontaneamente si è svolta quasi una gara, nell'interpretare le relazioni che ogni testo errato in realtà esprimeva.
Per me questo momento è stato occasione di varie scoperte. Per alcuni ragazzi, il percorso fatto era diventato tanto proprio che non avevano più bisogno di ripercorrere tutti i passi, ma, soltanto leggendo il testo, erano in grado di individuare ed esprimere relazioni anche complesse. Tre ragazzi in particolare, grazie al lavoro svolto, mostravano di essere arrivati quasi a «vedere con occhi nuovi»: essi, dentro un insieme di parole ordinate in modo da formare un testo di senso compiuto, riuscivano già a leggere in forma matematica la relazione che le parole racchiudevano. Per esempio si è considerato il seguente testo inventato:

> *Luca, il fioraio, domenica ha acquistato 235 rose gialle, rosse e bianche. Ogni giorno vende un mazzo di 30 rose miste. Alla fine della settimana Luca ha in magazzino solo rose ormai appassite, quante sono?*

Da questo testo legato alla relazione: $y = 235 - 30x$, è poi emerso il problema del dominio della variabile indipendente. È nata l'esigenza di scrivere una domanda che limitasse l'insieme di definizione della variabile x, in modo che la variabile y non assumesse valori negativi.

Interessante è stato anche esaminare la relazione $y = -5x$; la presenza del segno meno nella costante di proporzionalità ha costretto i ragazzi a ricercare situazioni opportune, che fossero espresse non soltanto da numeri naturali o razionali assoluti (molti hanno pensato ai valori della temperatura).

Si allarga il campo: un «linguaggio» per gli esperimenti

Il lavoro ha visto un suo naturale proseguimento in altre attività pluridisciplinari: la ricerca di relazioni tra grandezze fisiche presenti in due fenomeni: l'ebollizione dell'acqua e la caduta di sferette metalliche in un liquido viscoso (un detersivo liquido), studiati sperimentalmente nell'ambito dell'insegnamento di Scienze; sono state eseguite misurazioni di tempo e di temperatura nel primo esperimento, di tempo e spostamento nel secondo, i risultati della misura sono stati rappresentati graficamente e si sono analizzati i grafici ottenuti. Si è osservato un aspetto importante: i punti nel piano cartesiano corrispondenti ai dati sperimentali raccolti non potevano essere uniti tra loro da una retta con la stessa evidenza e facilità con cui i ragazzi l'avevano fatto nel caso algebrico, dal momento che le misure presentavano gradi d'errore, che lavorando in ambito matematico non emergevano. Qui si presenta una caratteristica di metodo di grande importanza per il rapporto tra la matematica e le scienze sperimentali. I ragazzi non riuscivano a immaginare una retta che «interpolasse» i dati: occorre un occhio minimamente esperto per individuarla. Confrontandoci tra colleghe, anziché forzare la visualizzazione di qualcosa che era loro estraneo, introducendo una procedura nuova, si è deciso di portarli a scoprirla, procedendo nel lavoro in due passi. Dapprima, i ragazzi hanno collegato i punti tracciando una spezzata che tutti riuscivano a vedere anche prima di disegnarla. Successivamente, su carta da lucido hanno rifatto questo lavoro per sei serie di dati ottenuti ripetendo le misure: sovrapponendo i lucidi, si andava a formare una «nube» di punti a matita, che ha finalmente permesso loro di vedere una configurazione lineare, e quindi a suggerire l'idea di una retta che approssimava i dati.
Il fatto che i ragazzi abbiano colto il nesso profondo tra gli esperimenti di Scienze e il linguaggio algebrico si è manifestato innanzitutto per la naturalezza con cui nelle ore di Algebra che seguivano le ore di Scienze i ragazzi utilizzavano spontaneamente lo stesso quaderno: un piccolo ma evidente sintomo del fatto che non percepivano come separate le due attività, ma coglievano un'unità di realtà, di oggetto d'indagine, nonostante l'insegnante di Scienze non fosse la stessa di Matematica.
Ancora, molto interessante è stato l'intervento di un ragazzo che, di fronte al grafico che riportava i risultati di un esperimento, ha affermato: «Prof, questo grafico è il *disegno* dell'esperimento!». Provocatoriamente, ho ribattuto che per disegno dell'esperimento ci si poteva aspettare una raffigurazione degli strumenti, oppure la descrizione dell'insegnate di Scienze che faceva cadere la pallina di metallo nel detersivo. Ma l'alunno ha obiettato: «Questi disegni descriverebbero solo una parte dell'esperimento, il contorno; dentro il grafico invece c'è tutto!». Ha dimostrato così la capacità di astrazione e di sintesi necessaria a cogliere il cuore della questione, cioè che la realtà fisica può essere descritta da leggi matematiche, e di questa sua intuizione ha reso partecipi anche i compagni.

Rita Mantegazza
(Già docente di Matematica presso la Scuola Secondaria di primo grado "San Tommaso Moro" della Fondazione "V. Grossmann").

Il lavoro è stato svolto in una classe terza per l'Open Day della scuola e discusso nell'ambito del Gruppo di Ricerca di Matematica, «Educare Insegnando», promosso dall'Associazione "Il rischio Educativo" (www.formazioneilrischioeducativo.org) coordinato da Andrea Gorini.

EMMECIquadro
Scienza Educazione E Didattica

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
www.emmeciquadro.eu

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389
Emmeciquadro (online)