EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

n. 89
Gennaio 2025

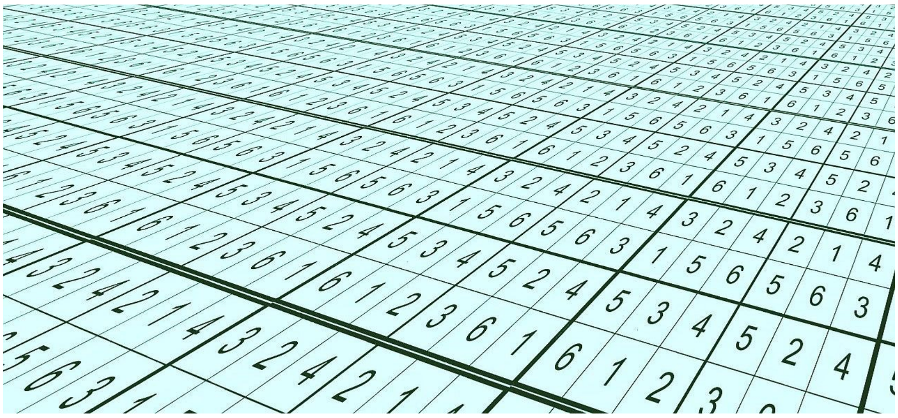
IL CONCETTO DI NUMERO
UN VIAGGIO VERSO L'ASTRAZIONE

di Anna Paola Longo e Graziella Visconti***

** Già assistente di Analisi Matematica al Politecnico di Torino*

*** Già docente di Scuola Primaria*

L'articolo sintetizza la lezione svolta da Anna Paola Longo per l'associazione MA.P.ES. nell'ottobre 2024. Vi si vuole delineare come nell'apprendimento dell'aritmetica nella Scuola Primaria sia ben identificabile il cammino dall'esperienza verso l'astrazione che conduce alla formazione nei bambini dell'idea di numero. Il tema è trattato ampiamente nel testo *La matematica e l'esperienza*, di Anna Paola Longo e Andrea Gorini.



L'apprendimento dell'aritmetica fin dal suo inizio nella scuola primaria non è solo questione di acquisire meccanismi di calcolo e procedure algoritmiche. Si tratta piuttosto si dare fondamento alla facoltà di astrazione, che caratterizza il pensiero razionale degli esseri umani.

Le origini

Il primo incontro di ciascun bambino con i numeri accade già quando egli è piccolissimo e prende coscienza del suo corpo (ho due mani, due piedi, cinque dita per mano...), memorizzando la quantità associata alle parole: «uno, due, …». In seguito, si rafforza nei primi giochi in gruppo, nella vita in famiglia, poi nella Scuola dell'Infanzia il bambino impara altri numeri, legati all'esperienza diretta fatta con il suo corpo. Dell'esperienza che è alla base dell'apprendimento è parte importante il gioco, attuato da soli o con altri.
Quando entra nella Scuola Primaria, il bambino viene guidato progressivamente a trasferire la sua attenzione dai singoli numeri agli insiemi numerici: avviene qui il suo primo incontro con l'infinito, anche se spesso non esplicitato.
Tracciamo a grandi linee la traiettoria del cammino verso l'astrazione che si verifica nell'apprendimento degli insiemi numerici nella scuola primaria.

.

L'insieme dei numeri naturali

I primi numeri che si incontrano nella scuola primaria sono i numeri naturali, usati per contare insiemi «discreti» di oggetti. L'aggettivo «discreto» è un termine specifico della matematica, indica che ogni elemento dell'insieme è *isolabile* da tutti gli altri. In particolare per i numeri, ogni elemento ha un «successivo»: indicando con n un generico numero naturale, ogni numero naturale n ha un successivo che indichiamo con n+1.
La possibilità di associare a ogni numero naturale un nuovo numero naturale, il suo successivo, permette di concludere che l'insieme dei numeri naturali contiene infiniti elementi. Questo insieme in matematica lo si indica con la lettera N.
Sappiamo che tra due numeri naturali a e b si definiscono le due operazioni «dirette»: addizione ($a + b = c$) e moltiplicazione ($a \times b = d$), sempre possibili, da cui si ottengono le operazioni «inverse»: per esempio, da 3 + 5 = 8, si passa a 8 - 3 = 5 e 8 – 5 = 3 e da 2×5 = 10 si passa a 10 : 2 = 5 e 10 : 5 = 2.
Osserviamo che in N non sempre è possibile la sottrazione, operazione inversa dell'addizione, per esempio 1 - 15 non è possibile; in generale, $a – b$ è possibile se $a > b$; se poi $a = b$, è $a – b = 0$. Qui si aprirebbe la strada per definire un nuovo insieme numerico in cui sia sempre possibile la sottrazione, ma nella scuola primaria non si segue questa via.
Analoga situazione si presenta per la moltiplicazione: da 25 × 2 = 50 discendono 50 : 2 = 25 e 50 : 25 = 2, ma è impossibile per esempio, la divisione 50 : 3. Infatti, tra tutti i multipli di 3, troviamo 3 × 16 = 48 e 3 × 17 = 51, ma non troviamo il 50! Se esistesse un numero naturale a per cui valesse $3 \times a = 50$, dovrebbe essere $16 < a < 17$, ma questo è impossibile in N. Da qui nasce la definizione di «divisibilità» in N tra due numeri (naturali):
dati a e b naturali, a è divisibile per b se la divisione a: b dà resto zero (per esempio, 17 non è divisibile per 3, perché 17: 3 ha resto 2; dunque, i numeri divisibili per 3 sono solo i multipli di 3).
Ora, oltre a sapere che N è un insieme discreto e che ogni suo elemento ha un successivo, sappiamo anche che N è «illimitato». Osserviamo poi che i numeri naturali sono disposti uno dopo l'altro in una successione «crescente», cioè riconosciamo tra i numeri naturali un «ordine»: se n e m sono numeri naturali, $n < n + 1$ e in generale $n < n + m$.

Usiamo i numeri: i problemi

Una fondamentale funzione dei numeri è permetterci di fare previsioni. Ce ne rendiamo conto quando ci troviamo a risolvere problemi con i numeri: ecco un esempio, in cui, a partire da un contesto concreto quotidiano, usiamo numeri naturali che aiutano a prevedere e decidere.

Devo comperare frutta e verdura al mercato, poi comperare una maglia pesante e andare a Milano dalla mia amica Gisella. Mi chiedo quanto potrò spendere per farle un regalo, sapendo che dispongo di 200 euro e che la spesa costa 50 euro, la maglia 80 euro, il viaggio 50 euro.
Per arrivare a una conclusione, devo calcolare la differenza tra la somma di denaro che possiedo e la spesa complessiva, che non ho già fatto, ma che prevedo di fare. Lo posso scoprire con un primo calcolo: 50 + 80 + 50 = 180 (euro).
Questo è quanto prevedo di dover spendere; ora posso calcolare quanto potrei spendere per il regalo: 200 −170 = 20 (euro). Finalmente so come regolarmi, comprerò per lei un libro.

Questo esempio ci porta a considerare che per usare i numeri in modo utile serve trovare il risultato (all'inizio sconosciuto) di operazioni, quindi occorre lavorare nell'insieme numerico N, insieme dei numeri naturali o interi positivi. Osserviamo che nella scuola primaria il porre problemi è forse lo strumento principale per rendere significativo l'apprendimento della matematica. Per questo, per introdurre le operazioni e arrivare a impararne gli algoritmi di calcolo, è molto opportuno partire da problemi, curandone bene naturalmente la gradualità, e privilegiando problemi vicini all'esperienza dei bambini, ma non banali.

Oltre l'insieme N: nuovi numeri in un nuovo insieme

Proprio la scelta di utilizzare contesti problematici offre lo spunto per verificare che l'insieme N non basta per risolvere tutte le situazioni che ci capitano. Ce ne convinciamo mediante un altro esempio.

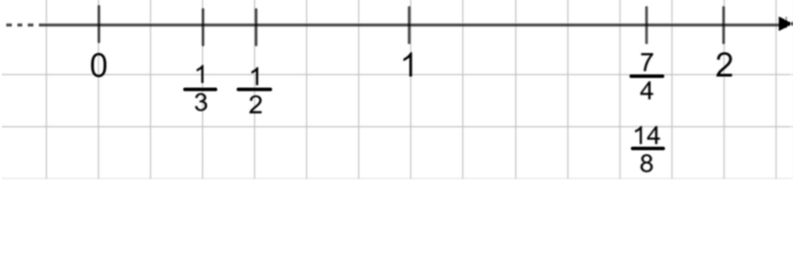
Per fare un canovaccio mi servono 50 cm di una stoffa resistente che costa 5 euro al metro. Quanto spendo?
Devo pagare la metà di 5 euro, quindi 2 euro più la metà di un euro. Non possiedo una moneta per pagare la metà di un euro e siccome non la conosco, è come se per me ancora non esistesse. Potrei comperare un intero metro di stoffa e fare due canovacci, oppure ricorrere a nuove monete, che per fortuna sono state inventate! Gli euro utilizzano infatti il «sistema decimale», in una forma particolare perché non sono stati emessi i decimi ma solo i centesimi, usiamo perciò i centesimi di euro.

L'esempio suggerisce che disponiamo di una moneta da 50 centesimi, equivalente a *mezzo euro*. Oltre alla nuova moneta, c'è una novità nel linguaggio, perché è stato inventato *un nuovo simbolo*: diciamo «un mezzo di» e scriviamo «1/2 di», è stata inventata la frazione 1/2. Questa frazione non esiste da sola, ma è dentro «un nuovo insieme»; infatti ogni simbolo *m/n*, con *m* e *n* numeri naturali e *n* non nullo, è una frazione.
Le frazioni sono un concetto molto antico, già gli Egizi le usavano, anche se naturalmente in un modo diverso dal nostro [1]. Oggi chiamiamo «numeri frazionari» le frazioni che scriviamo nella forma *m/n*.
Possiamo definire l'operazione di somma tra due frazioni e il prodotto di una frazione per un numero naturale, e per queste valgono le stesse proprietà che valgono in N. Abbiamo così un nuovo insieme di numeri, che indicheremo con la lettera Q, insieme che contiene il precedente, poiché le frazioni con denominatore multiplo del numeratore «corrispondono» ai numeri naturali: scriveremo infatti 28/7 = 4.
Vedremo presto che i numeri che abbiamo chiamato frazionari coincidono con i numeri correttamente definiti numeri «razionali», nel senso che sono definiti in modo diverso, ma esiste tra loro una corrispondenza biunivoca. Il termine della lingua italiana «razionale» deriva dal termine latino «ratio», che significa «ragione», ma anche rapporto, relazione, vincolo. Razionale significa, nel nostro caso, rapporto, quoziente. Ed è proprio l'interpretazione di quoziente del termine «ratio» che conferma la prima descrizione dei numeri razionali: «un numero razionale è il quoziente di due numeri interi», dunque questi numeri sono «rapporti». Questo significato apre un complesso campo di riflessione. Se esaminiamo una semplice frase come: *mezzo litro di latte costa 0,80 euro*, consideriamo che contiene due numeri razionali, uno in forma frazionaria espresso verbalmente (un mezzo) oppure in simboli (1/2), e uno in forma «decimale».

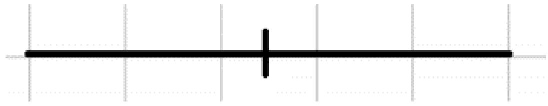
È entrata dunque una nuova rappresentazione, relativa a questi nuovi numeri, che proviene proprio dall'avere a che fare con «rapporti». Infatti, consideriamo per esempio la divisione 3 : 4; essa in N «non esiste», invece nel nuovo insieme conduce (utilizzando per il calcolo gli stessi algoritmi che in N) al risultato in forma decimale 0,75. Tale risultato può anche essere indicato in forma di frazione, usando la scrittura 3/4. Ha significato allora dire che «l'insieme dei numeri razionali è costituito dai numeri che possono essere espressi in forma decimale o sotto forma di frazione» [2], e proporre un percorso didattico che conduce dalle frazioni ai numeri decimali fino ai numeri razionali.

Una prima conoscenza dell'insieme Q

Nel nuovo insieme di numeri non vale, come in N, l'esistenza del successivo di ogni numero, ma vale un'altra proprietà, ben diversa: tra due qualsiasi frazioni (o numeri decimali) ne esistono infinite altre. L'insieme così configurato si dice «denso», definizione così espressa rigorosamente: un insieme è «denso» se, dati due suoi qualsiasi elementi *a, b,* con $a < b$, esiste un elemento *c* tale che $a < c < b$. Segue dalla definizione che un insieme denso ha necessariamente infiniti elementi: se prendiamo, per esempio, nell'insieme dei numeri razionali, i numeri 1/3 e 1/2 (1/3 è minore di 1/2), tra di essi ci sono infinite frazioni.
Se ci riferiamo alla retta numerica, e vogliamo continuare a pensare che a ogni numero razionale corrisponda un punto geometrico, dobbiamo concludere che nel segmento di estremi 1/3 e 1/2, di lunghezza finita, ci sono infiniti punti. Ci accorgiamo che i nostri modelli mentali devono cambiare: i punti non sono affatto come i granellini di sabbia o come piccolissime sfere! Siamo di nuovo a contatto con l'infinito.
Ancora, se rappresentiamo le frazioni su una retta, come abbiamo già fatto per i numeri naturali, ci attende una scoperta: per le frazioni non esiste più una corrispondenza biunivoca tra punti e numeri, perché a ogni frazione corrisponde un punto della retta, ma a ogni punto corrispondono infinite frazioni! Non si tratta più di una corrispondenza biunivoca, ma di una corrispondenza uno – molti! Se per esempio collochiamo sulla retta le frazioni 1/2, 1/3, 8/16, 3/9, 7/4, 14/8, 21/12, apparentemente tutte diverse una dall'altra, scopriamo che nel punto dove collochiamo 1/2, punto medio del segmento di estremi 0 e 1, dobbiamo collocare anche 8/16, nel punto dove collochiamo 1/3 dobbiamo collocare anche 3/9, nel punto dove collochiamo 7/4 (che vale 1+ 3/4) dobbiamo collocare sia 14/8 che 21/12 e così via. Ci accorgiamo che dovremo collocare nello stesso punto «tutte» le frazioni ottenute da una frazione, per esempio 1/2, 1/3, 7/4…, moltiplicando numeratore e denominatore per uno stesso numero naturale diverso da zero, quindi infinite frazioni che in matematica si dicono «equivalenti». Gli elementi che appartengono a uno stesso insieme di frazioni così ottenute hanno tutte lo stesso «rapporto» tra numeratore e denominatore e si chiamano «frazioni equivalenti», parola che significa che hanno tutte lo stesso valore. Le frazioni che hanno in comune il rapporto devono essere rappresentate tutte nello stesso punto: ecco una mirabile unità tra aritmetica e geometria, un riferimento cartesiano ci permette di visualizzare le relazioni tra numeri.



In questa proprietà sta la radice di un comportamento diventato familiare, a cui siamo abituati, cioè nei calcoli «semplificare» i rapporti di numeri naturali! Alle frazioni 10/4, 100/40, 150/60, ecc., possiamo sostituire la frazione 5/2, quella con i termini più piccoli nella «classe di equivalenza», di cui abbiamo detto che hanno tutte lo stesso valore. La parola «valore» riflette il fatto che quelle frazioni si rappresentano in uno stesso punto.
Lo scopriamo facilmente facendo, per esempio, la divisione 5 : 2 = 2 + 1/2, che può avere questa rappresentazione geometrica:



Allora nell'insieme Q possiamo permetterci di estendere la divisione a due numeri che in N non sono divisibili uno per l'altro, come 5 e 2, coppia in cui 5 non è divisibile per 2!! Trattiamo questi numeri naturali tenendo conto che sono anche numeri razionali (li possiamo pensare scritti in forma decimale con la virgola dopo le unità e tanti zeri); eseguiamo:

$$5 : 2 = 2{,}5$$

che ha significato perché

$$2{,}5 \times 2 = (2 + 0{,}5) \times 2 = (2 + 1/2) \times 2 = 4 + 1 = 5.$$

Una sintesi che porta a nuove aperture

Con un altro passo nella storia dei numeri, le frazioni si scrivono in forma decimale utilizzando il segno della virgola, ed è invalso l'uso di chiamarli «numeri decimali»:
vale che

$$1/2 = 0{,}5 \quad \text{oppure} \quad 27/3 = 9$$

ma anche:

$$32/3 = 30/3 + 2/3 = 10 + 2/3 = 10 + 2:3 = 10{,}(6).$$

E in questa scrittura si indica con (6) il 6 «periodico», cioè che si ripete infinite volte. E qui l'infinito è ricomparso addirittura nella rappresentazione del numero!
Ci appare una nuova corrispondenza interessante, nella quale è chiaro che i «vecchi» numeri naturali ricompaiono interpretandoli come sottoinsieme dei decimali e a ciascuno di essi corrispondono infinite frazioni: 15 = (15×3) /3 = (15×10)/10, ecc.
Se pensiamo che i passaggi, qui solo accennati, hanno richiesto cinque anni di lavoro e di cammino per essere proposti ai bambini, ci rendiamo conto di quale salto di astrazione abbiamo reso protagonisti i nostri alunni. Li abbiamo fatti passare dall'esperienza, generalmente intuitiva, del conteggio di quantità discrete, che originano i numeri interi, alla possibilità di dividere l'unità in un numero *n* «qualsiasi» di parti uguali! Un tipo di suddivisione che non è affatto sempre possibile per gli oggetti reali, fisici, ma è invece sempre possibile per il pensiero. Una suddivisione che si può eseguire materialmente per molti ordini successivi, ma si può fare senza limite solo nel pensiero!

Nella differenza tra realtà materiale e pensiero consiste la natura stessa della matematica, che fa suoi i modi del pensiero. Questo è uno degli aspetti dell'«astrazione», di cui non abbiamo paura perché è nel nostro pensiero, è una curiosità che ci fa andare sempre più avanti, purché ne siamo consapevoli. A scuola l'astrazione si deve scoprire, senza darla per scontata, ed è una ricchezza scoprirla, perché l'astrazione non significa staccarsi dalla realtà per uscirne, bensì guardare la realtà per vederne anche i nessi invisibili agli occhi.
Il cammino negli insiemi numerici non è comunque concluso, ci sono ancora importanti orizzonti da raggiungere, per esempio i numeri che chiamiamo reali: ma vogliamo lasciare anche qualcosa a chi raccoglierà dopo di noi l'apertura della ragione che già a questo livello si è raggiunta.

Anna Paola Longo (già assistente di Analisi Matematica al Politecnico di Torino) e Graziella Visconti (già docente di Scuola Primaria)

Indicazioni bibliografiche

[1] Fandiño Pinilla M.I., 2005, *Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici.* Pitagora, Bologna.

[2] Longo A.P., Gorini A., 2023, *La matematica e l'esperienza. Un contributo all'insegnamento della matematica nella scuola primaria,* Marcianum Press, Venezia.

[3] Baruk S., *Dizionario di Matematica Elementare,* Zanichelli.

EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
https://www.ilsussidiario.net/news/emmeciquadro/

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389