I PERCHÈ DEL NUMERO ZERO

L'ASTRAZIONE NELLA FORMAZIONE MATEMATICA DEGLI INSEGNANTI

di Anna Paola Longo

L'introduzione di concetti astratti e la giustificazione delle definizioni: questioni importanti e formative, ma anche non facili da declinare nella didattica. In ogni ordine di scuola è la riflessione critica dell'insegnante che porta a far comprendere il senso di questi passi fondamentali del «fare matematica». L'autore, prendendo come argomento il numero zero, mostra come, a partire dalla scuola elementare e fino al biennio della scuola superiore, sia necessario e opportuno soffermarsi su alcune convenzioni che altrimenti rischiano di essere formalismi senza motivo.

Nelle situazioni didattiche l'astrazione della matematica sembra costantemente apparire come un ostacolo. Gli insegnanti sanno che non si può rinunciare a questa caratteristica del pensiero matematico, ma sono anche convinti che essa costituisca una barriera per gli allievi, che diventa addirittura insormontabile per alcuni. Un bravo insegnante si sente tra il martello e l'incudine e rischia di ritenere insanabile la situazione.
Senza voler ora addentrarmi negli aspetti teorici di questa problematica, vorrei precisare che perché un insegnante possa interagire con i suoi allievi guidandoli lentamente verso i concetti matematici occorre certamente competenza sul metodo didattico, ma anche una conoscenza della matematica che vada ben al di là degli aspetti tecnici della disciplina.
Ci sono aspetti di significato, strettamente legati all'astrazione del pensiero, di cui non si parla abbastanza nella formazione degli insegnanti. Vorrei segnalarne alcuni pensando a tutto l'attuale percorso di scuola elementare, media e superiore, lasciando per ora in sospeso la questione della trasposizione didattica, in cui però è essenziale integrare la spiegazione tradizionale con una attività didattica complessa che permetta una lenta presa di coscienza da parte degli allievi.
Naturalmente sarei molto interessata a ricevere informazioni e contributi relativi a qualche sperimentazione didattica legata a quanto mi accingo a svolgere.

Lo zero

È un argomento che pone molte difficoltà. Per i bambini piccoli ha poco senso parlare del numero cardinale di un insieme vuoto, per i più grandi il fatto che non si può dividere per zero appare come un vero ostacolo. Esistono però molteplici aspetti che danno significato allo zero. Nella storia dei numeri si é avuto un grande vantaggio quando qualcuno ha pensato di introdurre questo simbolo. Si é trattato storicamente di un importante salto concettuale e bisogna rendersi conto che lo é ancora inizialmente per i bambini. Infatti per essi é il primo incontro con un ampliamento numerico, tipico dell'astrazione in matematica, che si ripeterà con i numeri razionali, gli irrazionali ed infine con i numeri complessi.
In prima elementare, prima dell'introduzione dello zero, i numeri naturali servono per indicare solo quantità concrete, con lo zero si stabilisce di assegnare un simbolo al «nulla» e poi di trattarlo come se fosse uno degli altri numeri.
Sarebbe un procedimento assurdo se non ci fossero delle buone ragioni e dei vantaggi, che ritengo fondamentale (e possibile) rendere evidenti anche ai bambini, in una didattica a lungo termine, di tipo elicoidale e riprendere successivamente, soprattutto nei casi di recupero di difficoltà.

Sottrazione tra quantità uguali

Il primo vantaggio riscontrabile è che lo zero serve in primo luogo come risultato dell'operazione di sottrazione tra due quantità uguali, uniformando la rappresentazione della sottrazione in tutti i casi: differenze tra quantità diverse oppure tra quantità uguali diventano così assimilabili nella rappresentazione con i numeri.

Scrittura posizionale

Un secondo vantaggio si ha nella rappresentazione dei numeri secondo la scrittura posizionale, poiché permette di sostituire una scrittura rapida ma inequivocabile alla scrittura polinomiale:

$$2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 10^0 = 2\,035$$

Mentre la prima scrittura é chiara perché esplicita, la seconda non risulterebbe chiara se lo zero non segnalasse che è vuoto il posto delle centinaia (le potenze di dieci sono un linguaggio non strettamente necessario, si può usarlo nelle scuola media, ma si può tranquillamente evitare nella scuola elementare, pur conservando il contenuto concettuale di questa osservazione).

Moltiplicazione per zero

Il passo seguente é dare significato alla moltiplicazione per zero. Infatti quando si pone

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

per ogni numero naturale, si fa un ampliamento (per convenzione) della definizione iniziale. Non é difficile trovare un motivo valido e convincente, per esempio la facilitazione che si ottiene nella costruzione dell'algoritmo della moltiplicazione, come risulta dal seguente esempio.
Operiamo prima in riga:

$$403 \cdot 12 = 403 \cdot (10+2) = (403 \cdot 10) + (403 \cdot 2) = 4\,030 + 806 = 4\,836$$

e poi trascriviamo in colonna ciò che abbiamo già eseguito:

$$\begin{array}{rl} 403 & \times \\ 12 & \\ \hline 806 & \qquad \text{(cioè 403x2)} \\ 4030 & \qquad \text{(cioè 403x10)} \\ \hline 4836 & \end{array}$$

Quest'algoritmo ha la facile descrizione, a tutti nota, solo se si pone

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Con questo accorgimento non abbiamo toccato il senso dell'operazione, ma abbiamo esteso a tutti i numeri un algoritmo comodo, che si stabilisce con grande facilità quando i numeri non hanno cifre nulle. È dunque una ragione che si situa al livello della «rappresentazione», che non è certo un livello concreto. Ma questa ragione mi sembra più convincente del ricorso a situazioni concrete lontane dal senso comune. Una giustificazione più elegante è possibile se ci si riferisce alle proprietà delle operazioni: poiché è $0 = b - b$ per ogni numero naturale b, si deve porre necessariamente $a \cdot 0 = a\,(b - b) = 0$ se si vuole che sia valida la proprietà distributiva. Questa seconda considerazione mi sembra però meno adatta della prima a porre in evidenza la necessità di definire il prodotto per 0.

Perché non si può dividere per zero?

Mi sembra che qui il ricorso all'intuizione e all'esperienza possa essere perfino sviante. L'unica ragione che mi sembra contemporaneamente semplice e convincente é quella formale, che

ritengo comprensibile anche dai bambini, se passa attraverso un'opportuna mediazione didattica.
Tra i numeri naturali (non nulli) é noto che:

$$\text{se} \quad a \cdot b = c \quad \text{allora} \quad c : a = b \quad \text{e} \quad c : b = a$$

e viceversa.
Per esempio 35 : 5 = 7 e 35 : 7 = 5 sono entrambe vere perché 7 • 5 = 35. Supponiamo ora di voler ampliare la divisione (analogamente alla moltiplicazione) cercando una possibilità di risultato se si divide per zero. Se si cerca a naturale tale che 5 : 0 = a, deve essere $5 = 0 \cdot a$; ma non esiste un numero naturale con questa proprietà perché abbiamo già posto $0 \cdot a = 0$ qualunque sia a.
Non esiste dunque lo spazio per una nuova definizione, al contrario del caso della moltiplicazione. Questo modo di procedere è possibile se dopo aver usato i problemi per introdurre le operazioni, si passa poi a studiarle come operazioni astratte facendo un uso appropriato della tavola pitagorica. È necessario che i bambini sappiano distinguere il piano dei problemi, in cui i numeri sono legati alle marche, dal piano delle operazioni tra numeri in cui non si fa più riferimento alle marche.

Lo zero elemento neutro della somma

L'uso dello zero nelle equazioni trascende questi significati: possiamo passare da $5x - 1 = 0$ a $5x = 1$ perché zero é l'elemento neutro della somma. Nella prassi didattica lo si giustifica spesso in modo meccanico, ma la sostanza é questa. Comprendere, a mio avviso, significa poterlo esplicitare, anche con la lentezza e la gradualità necessarie ai bambini e senza usare troppo precocemente il linguaggio dell'algebra astratta.

Lo zero come esponente

Perché $a^0 = 1$? Sappiamo che è una convenzione, allora cosa significa in questo caso comprendere? A mio avviso, coglierne le ragioni. Queste sono molto semplici, se si sta sul piano giusto, che è ancora una volta quello della rappresentazione.
Il primo passaggio è stabilire che

$a^m : a^n = a^{m-n}$ se $m > n$ e che se $m = n$ è invece $a^m : a^m = 1$.

Il passaggio successivo è unificare formalmente le due precedenti situazioni scrivendo solo

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (m \geq n),$$

ma ponendo per convenzione $a^0 = 1$ «per convenzione».

È chiaro che per far cogliere agli allievi l'importanza di questa convenzione, come pure di tutte le altre caratteristiche del numero 0, occorre che il lavoro su cui la classe è impegnata non abbia come unico livello quello del calcolo, ma anche quello delle rappresentazioni e della ricerca delle ragioni. Sono fatti che costituiscono l'aspetto più interessante e formativo dell'educazione matematica, che possono offrire da subito argomento di discussione e di riflessione.
Uno dei motivi che rendono la matematica difficile e lontana dagli allievi è l'impossibilità di trovare ragioni convincenti per il lavoro che viene loro richiesto, cioè in altre parole la difficoltà di rilevare un senso per l'attività matematica.
In presenza di ragioni, i bambini piccoli risultano normalmente ben disposti a mettersi in opera, e questo atteggiamento può trasformarsi in abitudine, mentre è difficilissimo recuperarlo dopo la scuola elementare.

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

E. Fischbein, *Concreto ed astratto nell'insegnamento della matematica elementare* in: G. Prodi, *Processi cognitivi ed apprendimento della matematica nella scuola elementare*, La scuola, Brescia 1981.
H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica*, La Scuola, Brescia 1994, (ed. orig. 1991).