

IL MOTO BROWNIANO

UN PERCORSO DIDATTICO PLURIDISCIPLINARE

di Paoloantonio Marazzini*

A conclusione di un corso di scuola superiore, ogni insegnante accorto, oggi più che mai sente l'esigenza di creare occasioni di lavoro attraverso le quali gli studenti più impegnati possano affrontare problematiche nuove mettendo a frutto tutte le conoscenze acquisite. Dopo percorsi di apprendimento in ambiti disciplinari diversi, inevitabilmente sviluppati in parallelo, un momento di sintesi rende possibile per gli insegnanti coinvolti, e per gli studenti, l'esperienza di una novità sul piano culturale. Oltre la routine del conformismo scolastico.

La proposta di questo percorso didattico sul moto browniano ha avuto come obiettivo quello di coinvolgere un gruppo di allievi di classe quinta in una ricerca su una tematica di contenuto fisico che rispondeva ad alcuni requisiti significativi sul piano didattico e culturale. Un argomento di struttura della materia, riguardante la fisica del Novecento, poteva interessare più docenti della stessa classe e si prestava per la preparazione di una tesina d'esame compatibile con la strumentazione di cui è dotato l'Istituto e con le competenze di base maturate dagli studenti nel corso dei loro studi.

Diversi argomenti possono soddisfare i requisiti ora ricordati; la scelta del moto browniano è stata determinata dall'intenzione di presentare un lavoro didattico nell'ambito della mostra promossa dall'Istituto Nazionale per la Fisica della Materia (INFN) intitolata *Semplice e Complesso*. Questo obiettivo iniziale è poi caduto, ma il percorso è stato comunque condotto a termine e si è concluso con la sua presentazione presso il Museo della Scienza e della Tecnologia di Milano nell'ambito della manifestazione *Scienza Under 18* e con il suo utilizzo, da parte degli studenti che si sono impegnati in esso, nell'Esame di Stato dell'anno in corso.

Il percorso è stato articolato in tre segmenti a carattere rispettivamente storico - filosofico, teorico e sperimentale. A questi è stato aggiunto un quarto segmento, realizzabile grazie alle competenze informatiche acquisite dagli studenti nel loro curriculum scolastico, finalizzato all'esecuzione di una simulazione del moto browniano a partire dal modello atomistico.

*L'attività didattica è stata progettata e coordinata dall'autore in una classe quinta del Liceo Scientifico Tecnologico dell'Istituto E. Molinari di Milano. Il percorso ha coinvolto sei studenti e i docenti di fisica, filosofia, sistemi informatici, chimica. Il lavoro è stato svolto dagli studenti: Sergio De Gasperi (SD); Simone Masoli (SM); Andrea Frizziero (AF); Mario Danzo (MD); Lorenzo Casalino (LC); Ivo Fumagalli (IF).

Il segmento storico-filosofico

I contenuti storico-filosofici sono stati approfonditi da SD, secondo la seguente scansione: l'atomo di Democrito; le teorie di Dalton: elementi e atomi differenziati con caratteristiche proprie; dal positivismo alle teorie scientifico-filosofiche di fine Ottocento: energetica, fenomenologia, atomismo; il carattere economico della scienza secondo Mach; la difesa dell'atomismo da parte di Boltzmann; l'economia concettuale dell'atomismo e il significato teorico delle funzioni integrali e differenziali; la conferma sperimentale dell'atomismo realizzata mediante gli esperimenti di Perrin.

In questo lavoro è stato coinvolto il docente di filosofia e sono stati utilizzati i manuali di filosofia in adozione e il testo intitolato *L. Boltzmann, Modelli matematici, fisica e filosofia. Scritti divulgativi*, edito nella Universale Bollati Boringhieri, nel 1999 a cura di C. Cercignani.

Cenni storici sul moto browniano e suo ruolo nel dibattito fra fenomenismo e atomismo

Il moto browniano fu osservato per la prima volta da Robert Brown nel 1827, grazie all'uso di microscopi acromatici, allora di recente realizzazione.

Esso consiste in un movimento caotico e perenne di granuli di dimensioni non superiori a qualche micrometro sospesi in liquidi di varia natura.

Il movimento risulta indipendente dal materiale di cui è fatto il granulo, mentre dipende (vedremo più avanti l'espressione formale di questa dipendenza) dal suo raggio, dalla viscosità del liquido in cui esso si trova sospeso, dalla temperatura del liquido e dal tempo trascorso.

Il moto browniano è osservabile anche nel gas ove, anzi, qualora si utilizzino granuli di dimensioni adeguate, diviene molto vivo ed evidente.

Per alcuni decenni dopo la sua scoperta il moto browniano non suscitò molto interesse ma, a partire dagli anni Sessanta del XIX secolo¹, esso cominciò a essere considerato come prova indiretta dei movimenti propri delle particelle di cui si immaginano costituiti i liquidi e i gas, in altri termini, venne considerato come possibile prova sperimentale della costituzione atomica e molecolare della materia.

Una parte notevole (e autorevole) della comunità dei fisici di quel periodo non accettò questa tesi corpuscolarista. Uno dei motivi di questo atteggiamento di scetticismo risiedeva nella visione «fenomenista» della fisica (sostenuta e precisata sul piano teorico da Ernst Mach, ma condivisa da molti altri, fra i quali merita ricordare Heinrich R. Hertz) secondo la quale l'unico «modello» accettabile della realtà materiale è costituito dalla sua descrizione matematica. Poiché, d'altra parte, tale descrizione è fondata sulle equazioni differenziali, cioè sulle equazioni del continuo matematico, essi estendevano, arbitrariamente, tale continuismo anche alla materia rifiutando il modello atomico.

Le ultime decadi dell'Ottocento vedono quindi la comunità dei fisici coinvolta nel dibattito fra il continuismo e l'atomismo, dibattito che si concluse nei primi due decenni del XX secolo non solo grazie alla conferma sperimentale del carattere corpuscolare dell'elettrone (Joseph John Thomson, 1897) o della nascita del modello nucleare dell'atomo (Ernest Rutherford, 1911), ma anche all'interpretazione atomistica formalizzata del moto browniano (Albert Einstein, 1905²) e alla relativa conferma sperimentale della suddetta interpretazione (Jean-Baptiste Perrin, 1914).

Proprio il lavoro di quest'ultimo fisico³ ha costituito il punto di riferimento teorico⁴ e sperimentale del nostro percorso.

¹Si tenga presente che proprio in questo periodo Clausius precisò in termini formali la teoria cinetica dei gas. Questa teoria viene solitamente studiata nell'ambito della termodinamica e deve essere considerata un requisito didattico per lo studio del moto browniano.

²A. Einstein, *On the movement of small particles suspended in stationary liquids, eccetera, The collected papers of Albert Einstein, Vol. II*, Princeton University Press, 1989, pp. 123-134.

³Riportato in: J. Perrin, *Gli atomi*, Editori Riuniti, Milano 1981.

⁴A causa della sua difficoltà di lettura, il lavoro di Einstein è stato solo ricordato. D'altra parte esso viene ripreso in una forma un poco più semplice nel libro di Perrin.

Il segmento teorico

I contenuti teorici sono stati approfonditi in particolare dall'allievo SM, che ha utilizzato gli scritti originali di Jean Perrin, in particolare i capitoli terzo e quarto de *Gli atomi* (Editori Riuniti 1981).

L'obiettivo dell'analisi teorica era la comprensione e la giustificazione della seguente relazione (p. 139 del testo di Perrin).

$$X^2 = \frac{RT}{N} \cdot \frac{t}{3\pi a z}$$

nella quale:

X^2 = media dei quadrati delle ascisse dello spostamento del granulo in sospensione dopo un intervallo di tempo t (d'ora in poi indicheremo questa variabile con il simbolo $\langle X^2 \rangle$);

R = costante generale dei gas;

T = temperatura assoluta della sospensione;

N = numero di Avogadro;

a = raggio del granulo;

z = viscosità del liquido.

L'allievo SM ha esaminato anche il problema della distribuzione dei granuli secondo la direzione verticale (capitolo terzo del testo di Perrin) limitandosi però a cogliere il significato fisico generale di questa analisi, che si affianca al moto browniano nel confermare l'ipotesi del moto molecolare. L'apparato di misura a nostra disposizione non consentiva infatti di evidenziare questo fenomeno e, d'altra parte, un suo esame completo, sia sul piano teorico che sul piano sperimentale, avrebbe probabilmente ampliato eccessivamente l'impegno degli studenti.

Il segmento sperimentale

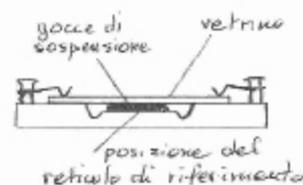
Gli aspetti sperimentali sono stati affrontati dagli allievi MD e AF, in stretta collaborazione con il coordinatore del progetto.

L'apparato di misura utilizzato allo scopo consisteva in un microscopio nel quale la funzione dell'oculare viene svolta da una telecamera che genera perciò una immagine direttamente osservabile sul video di un televisore. Collocando quindi sul video stesso un foglio trasparente si potevano segnare su di esso le posizioni assunte dal granulo ad intervalli prefissati di tempo.

Poche gocce della sospensione dei granuli venivano collocate in una cella di Thoma (rappresentata nell'immagine a lato) e osservate, in genere, a 550 ingrandimenti, in un paio di casi fortunati a 2 200 ingrandimenti. Purtroppo la messa a punto del microscopio ad ingrandimento così elevato è un'operazione piut-

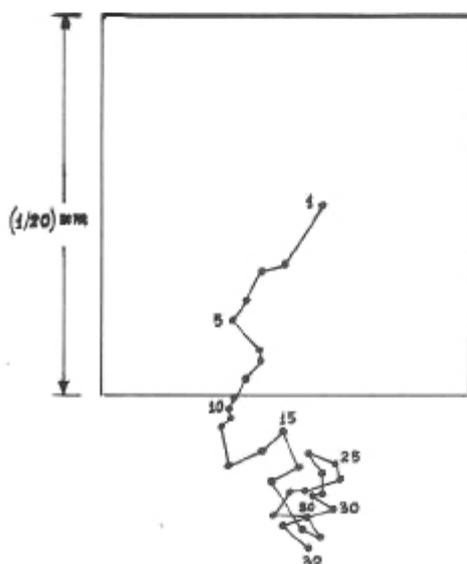
La deduzione della formula a lato, nel testo di Perrin ripercorre i passaggi logici di Einstein e offre qualche difficoltà di comprensione per uno studente di scuola superiore. Si è perciò fornita una sintesi delle trattazioni del moto browniano riportate rispettivamente in: P.A. Tipler, *Modern Physics*, Worth Publishers, INC., pp. 81-84; P.Fleury e J.P.Mathieu, *Calore - Termodinamica - Stati della materia*, Zanichelli, Bologna, pp. 221-222 (prescindendo dagli aspetti formali non adeguati alle conoscenze di matematica di uno studente del quinto anno).

Schema della cella di Thoma. La base della cella reca inciso un reticolo bidimensionale costituito da quadretti di lato 0,05 mm. La sospensione (poche gocce) è imprigionata entro uno spessore di 0,1 mm (non in scala) e ricoperta da un vetrino.



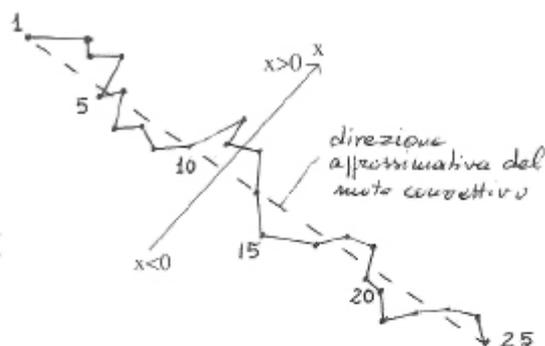
tosto complessa e perciò, normalmente, abbiamo utilizzato l'ingrandimento inferiore.

Non siamo riusciti a trovare la polveré di gommagutta che Perrin aveva usato nei suoi esperimenti¹ e perciò abbiamo utilizzato sospensioni acquose di borotalco per neonati e sospensioni di zolfo prodotte introducendo acido nitrico diluito in soluzioni acquose di tiosolfato sodico.²



Individuato il granulo che mostrava un moto browniano abbastanza ampio, con un pennarello nero veniva marcata la posizione da esso assunta ogni trenta secondi. Nell'immagine a lato è riprodotta la sequenza di spostamenti di uno di questi granuli effettuata in un arco di tempo di $32 \cdot 30 \text{ s} = 960 \text{ s}$ e osservata a 2 200 ingrandimenti.

In diversi casi al puro moto browniano si sovrapponeva un moto convettivo che spostava il granulo in una certa direzione della cella. In tali casi il granulo veniva mantenuto nel campo dell'obbiettivo con un opportuno spostamento del piano oggetti del microscopio e, al termine dei rilevamenti, i diversi segmenti della traiettoria venivano riportati, uno dopo l'altro, rispettandone l'orientamento spaziale, su un grande foglio di carta millimetrata come rappresentato nell'immagine che segue.



Schema indicativo di un moto browniano sovrapposto a un moto convettivo del granulo

Individuata la direzione del moto convettivo, congiungendo la prima con l'ultima posizione del granulo, venivano poi rilevati gli spostamenti X del granulo perpendicolari ad essa e, a partire da tali valori, venivano eseguiti i calcoli successivi.

Vediamo ora, più in particolare, i calcoli effettuati. Teniamo presente che l'obbiettivo era quello di verificare la correttezza della relazione di Perrin da cui siamo partiti; tuttavia, dal momento che abbiamo sempre operato con sospensioni acquose e che non siamo riusciti a individuare granuli caratterizzati da raggi sufficientemente diversi, le nostre misure ci hanno consentito di

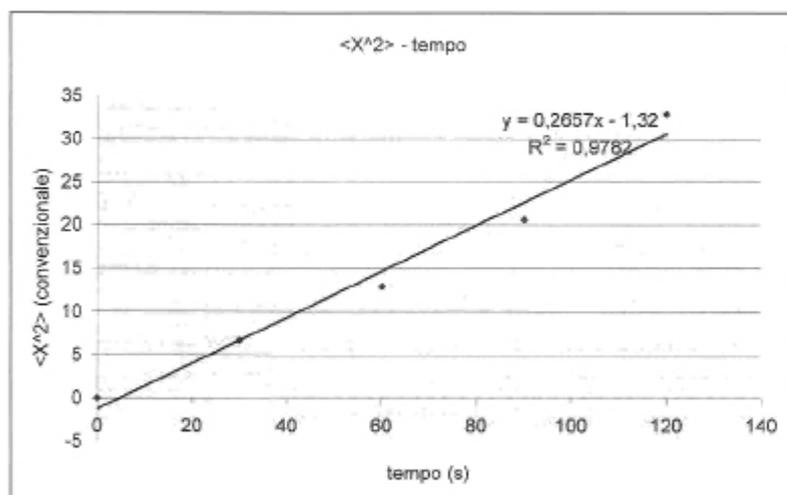
verificare soltanto la dipendenza di proporzionalità diretta fra $\langle X^2 \rangle$ e t . Allo scopo, abbiamo rilevato i valori di X relativi a una sequenza abbastanza numerosa di spostamenti effettuati a intervalli di 30 s disponendo i fogli trasparenti su fogli di carta millimetrata e scegliendo una direzione di riferimento; gli spostamenti che risultavano concordi con la direzione di riferimento venivano assunti con segno positivo, quelli che risultavano discordi, con segno negativo. Abbiamo quindi calcolato i valori di X^2 e, successivamente, il valore di $\langle X^2 \rangle$ utilizzando la relazione:

$$\langle X^2 \rangle = \frac{\sum_i X^2}{n}$$

essendo n il numero degli spostamenti rilevati.

Successivamente abbiamo sommato algebricamente tra loro il primo e il secondo valore di X , il terzo e il quarto valore di X , eccetera, individuando in tal modo gli spostamenti del granulo effettuati a intervalli di 60 s ed abbiamo calcolato il valore di $\langle X^2 \rangle$ sui nuovi valori di X^2 . Sommando algebricamente le terne successive di valori di X o le quaterne successive di valori di X abbiamo infine determinato gli spostamenti del granulo effettuati in intervalli di tempo di 90 s e di 120 s e, successivamente, abbiamo calcolato i corrispondenti $\langle X^2 \rangle$.³

Nell'immagine a fondo pagina è rappresentato il grafico relativo a un rilevamento di 48 spostamenti.⁴ Come si vede, il valore di R^2 piuttosto elevato (0,97) indica che i punti sperimentali esprimono molto bene una dipendenza di tipo lineare. Non sempre il valore di R^2 dei grafici ottenuti era così elevato. Operando su 36 spostamenti di una delle traiettorie riportate a pagina 140 del testo di Perrin si è trovato un R^2 pari a 0,863 e da ciò si è dedotto che tutte le misure erano state eseguite in modo per lo meno soddisfacente.



¹Il prodotto è da tempo fuori commercio.

²Non sempre le sospensioni dell'uno e dell'altro tipo fornivano particelle adeguate e, perciò, su otto sedute sperimentali, un paio sono andate a vuoto nella vana ricerca di granuli abbastanza mobili.

³Per la sequenza di calcoli si utilizzavano sequenze di spostamenti per esempio da 36 o 48 spostamenti, cioè da numeri di spostamenti divisibili per 2, 3, 4.

⁴Il grafico si riferisce a un'osservazione effettuata in presenza di un rapido moto convettivo, separato dal moto browniano.

Il quarto segmento: la simulazione

La simulazione del moto browniano è stata realizzata inizialmente dagli allievi LC e IF, sulla traccia indicata dal coordinatore del percorso. Il suo scopo era quello di mostrare che, simulando una sequenza numerosa di urti caotici, supposti elastici, di un fiotto di particelle, caratterizzato da una velocità variabile in modo gaussiano, contro un granulo di raggio e massa nota, si ottiene un valore di $\langle X^2 \rangle$ che, almeno entro certi limiti, rispetta le dipendenze previste dalla relazione di Perrin.

Nei punti che seguono descriviamo in modo più esplicito i passaggi logici della simulazione e l'approssimazione delle ipotesi assunte. La simbologia utilizzata è quella del listato realizzato dagli allievi, nel quale si è cercata una certa corrispondenza fra i simboli usati e il significato delle variabili a essi corrispondenti.

Un fiotto di NP particelle di liquido, aventi massa m , colpisce un granulo di raggio R costituito da un materiale di densità approssimativamente uguale a quella del liquido.

Nella simulazione abbiamo assunto come liquido di sospensione l'acqua e perciò abbiamo posto:

$$m = 18 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 3 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

$$\text{densità } \delta = 1000 \text{ kg/m}^3$$

La massa MG del granulo in sospensione sarà quindi data da:

$$MG = 4/3 \pi R^3 \delta$$

mentre la massa di liquido che urta il granulo è data da:

$$ML = NP \cdot m$$

L'ipotesi che sia un fiotto di particelle di liquido a colpire il granulo è sicuramente non corrispondente alla realtà in quanto, presumibilmente, sono le singole molecole del liquido a colpire il granulo in modo caotico. Tuttavia essa è compatibile con il fatto che, data l'estensione del granulo, vi saranno molte particelle che lo colpiscono praticamente nello stesso istante. D'altra parte l'ipotesi del fiotto di particelle coerenti consente di ridurre il numero NT di urti simulati che determinano lo spostamento del granulo in un prefissato intervallo di tempo di valore finito. Infatti, diminuendo NP a valori realistici, il numero di urti NT aumenterebbe enormemente rallentando i tempi di esecuzione della simulazione. Conviene comunque assumere sia NT che NP come variabili di ingresso della simulazione onde poter osservare eventualmente come variano i risultati al variare del loro valore.

Si assegna al fiotto una velocità V con i criteri seguenti.

a. La direzione di V viene scelta nell'intervallo 0° - 360° secondo un criterio di equiprobabilità utilizzando la funzione RANDOM.

b. Il valore di V viene scelto entro una distribuzione gaussiana centrata attorno al valore $V = \sqrt{3 k T / ML}$.

Con una scelta piuttosto arbitraria, ma forse non del tutto scorretta, abbiamo assunto una gaussiana di estremi 0 e $2V$; abbiamo poi suddiviso questo intervallo in 31 parti uguali di ampiezza $DELTA V = V \cdot 2/31$ e abbiamo assunto la σ della funzione gaussiana pari a $5 \cdot DELTA V$.

Definita la densità di probabilità δ_p in corrispondenza degli estremi sinistri dei 31 intervalli di velocità, abbiamo calcolato i 31 valori $\delta_p \cdot DELTA V$ assegnandoli a un vettore PROB. Successivamente abbiamo suddiviso l'intervallo $0-1$ della RANDOM in sottointervalli di ampiezza proporzionale ai prodotti $\delta_p \cdot DELTA V$ assegnando i valori degli estremi sinistri di tali intervalli a un nuovo vettore INTERV.

Dopo ogni estrazione casuale di un valore dalla RANDOM abbiamo stabilito entro quale intervallo i^{mo} del vettore INTERV esso va a cadere e abbiamo assegnato a V il valore $i \cdot DELTA V$.

Il granulo acquisisce una velocità VC , nella stessa direzione e nello stesso verso di V , data dalla relazione, deducibile dall'ipotesi di urto elastico centrale, seguente:

$$VC = \frac{2 \cdot ML \cdot V}{ML + MG}$$

L'energia cinetica del granulo risulterà uguale a $1/2 MG \cdot VC^2$ e si esaurirà in un tratto DL a causa della forza viscosa FV data da:

$$FV = 6 \pi E \cdot R \cdot VC \quad (\text{con } E = \text{viscosità del liquido}) \quad (*)$$

Applicando questa relazione si assume come ipotesi, sicuramente errata, che VC resti costante su tutto il tratto corrispondente alla frenata. Per tenere conto, almeno approssimativamente, della progressiva diminuzione della velocità del granulo abbiamo perciò assegnato alla velocità che determina la forza viscosa il valore $VC/2$.

La relazione (*) diviene perciò:

$$FV = 6 \pi E \cdot R \cdot VC/2 = 3 \pi E \cdot R \cdot VC$$

Il tratto DL percorso dal granulo prima di fermarsi risulta allora data da: $DL \cdot FV = 1/2 MG \cdot VC^2$

quindi

$$DL \cdot 3 \pi E \cdot R \cdot VC = 1/2 MG \cdot VC^2$$

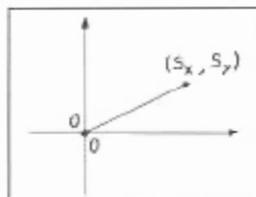
dalla quale:

$$DL = \frac{MG \cdot VC}{6 \pi E \cdot R}$$

Determinato DL si sposta il granulo di un tratto pari a DL nella direzione della velocità V determinata nel secondo passaggio e si calcolano le componenti X_{DL} e Y_{DL} dello spostamento DL .

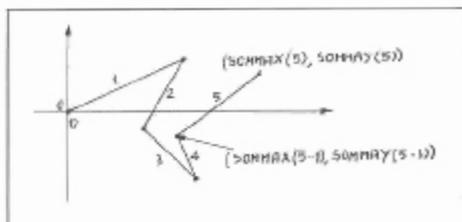
Si ripetono le operazioni dalla seconda alla settima per NT volte e si determina la sommatoria delle componenti X_{DL} e Y_{DL} con le operazioni: $S_X = \sum_{NT} X_{DL}$ e $S_Y = \sum_{NT} Y_{DL}$

I valori di S_X e S_Y così ottenuti rappresentano le coordinate dell'apice del primo spostamento realizzato dal granulo dopo NT urti supponendo che l'origine dello spostamento si trovi nel punto di coordinate 0,0 come rappresentato nell'immagine a lato.



Mantenendo invariati i valori di tutte le variabili e di NT si ripete, per NR volte, tutta la procedura dal secondo all'ottavo passaggio definendo NR coppie di valori di S_X e S_Y .

Tutti i valori di S_X e S_Y via via ottenuti vengono immagazzinati in due vettori SOMMAX(i) e SOMMAY(i). Questa procedura equivale a individuare gli spostamenti via via realizzati dal granulo in successivi intervalli di tempo proporzionali a NT . L' i mo spostamento avrà come origine il punto di coordinate SOMMAX(i-1), SOMMAY(i-1) e come apice il punto di coordinate SOMMAX(i), SOMMAY(i) come rappresentato nell'immagine a lato.



In conclusione: il valore di NT risulta proporzionale all'intervallo di tempo che separa la posizione $(i-1)$ del granulo dalla posizione i e quindi, riferendosi all'esperimento precedentemente descritto, NT rappresenta l'intervallo di 30 s; il valore di NR indica invece il numero di spostamenti che il granulo ha realizzato in NR intervalli di tempo di 30 s.

Si passa ora alla fase del confronto degli esiti della simulazione con la relazione di Perrin riportata a p. 101.

- Si determinano i quadrati degli NR valori SOMMAX(i), si esegue l'operazione $\langle X^2 \rangle = [\sum_i \text{SOMMAX}(i)^2] / NR$ e si trascrive la coppia di valori $NT, \langle X^2 \rangle$.
- Per determinare la dipendenza di $\langle X^2 \rangle$ dal tempo t , si varia più volte il valore di NT , mantenendo invariate tutte le altre variabili, e si determinano i corrispondenti valori di $\langle X^2 \rangle$. Il grafico $\langle X^2 \rangle, NT$ deve evidenziare una dipendenza di proporzionalità diretta in quanto NT rappresenta l'ampiezza dell'intervallo di tempo corrispondente a uno spostamento finito del granulo.
- Per determinare la dipendenza di $\langle X^2 \rangle$ dal raggio del granulo si varia il valore di R mantenendo invariate tutte le altre variabili e si determinano i corrispondenti valori di $\langle X^2 \rangle$. Il grafico $\langle X^2 \rangle, R$ deve evidenziare una dipendenza di proporzionalità inversa.
- Per determinare la dipendenza di $\langle X^2 \rangle$ dalla viscosità del liquido di sospensione si varia il valore di E mantenendo invariate tutte le altre variabili e si determinano i corrispondenti valori di $\langle X^2 \rangle$. Il grafico $\langle X^2 \rangle, E$ deve evidenziare una dipendenza di proporzionalità inversa.

e. Per determinare la dipendenza di $\langle X^2 \rangle$ dalla temperatura del liquido si varia il valore di T mantenendo invariate tutte le altre variabili e si determinano i corrispondenti valori di $\langle X^2 \rangle$. Il grafico $\langle X^2 \rangle$, \sqrt{T} deve evidenziare una dipendenza di proporzionalità diretta.

La simulazione riproduce piuttosto bene la dipendenza di $\langle X^2 \rangle$ dal tempo, dalla viscosità e dalla temperatura, meno bene la dipendenza dal raggio del granulo.

La curva $\langle X^2 \rangle$, R scende infatti troppo rapidamente, indicando una eccessiva approssimazione del modello. Si osservi però che, facendo comparire esplicitamente il raggio nell'espressione di DL si ottiene:

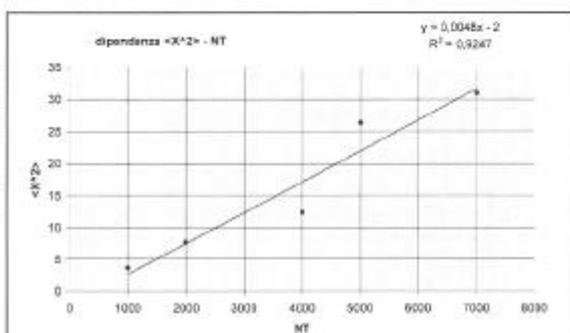
$$DL = \frac{MG \cdot VC}{6 \pi E \cdot R} = \frac{4/3 \pi R^3 \delta \cdot 2 \cdot ML - V/(ML + MG)}{6 \pi E \cdot R} = \frac{4 \delta V \cdot ML \cdot R^2}{9 E(ML + 4/3 \pi \delta R^3)} = k_1 \frac{ML \cdot R^2}{ML + k_2 \cdot R^3}$$

Dalla forma di questa relazione si può dedurre che se ML è grande rispetto a $k_2 \cdot R^3$ (e ciò avviene per R molto piccolo) il DL cresce col raggio del corpuscolo. Quando invece $ML \ll k_2 \cdot R^3$ (e ciò avviene per R piuttosto grandi) il DL varia con una dipendenza del tipo $1/R$.

La dipendenza di DL dal raggio è quindi funzione di R e la simulazione rispetterà quindi con discreta approssimazione la relazione di Perrin solo per raggi del granulo non troppo piccoli.

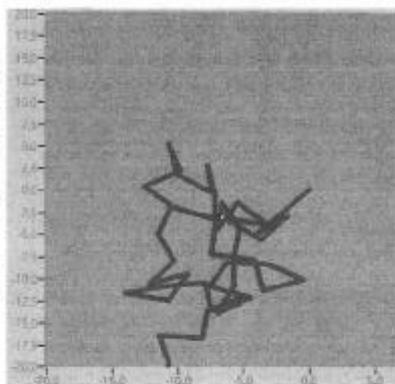
Gli allievi LC e IF hanno realizzato la simulazione utilizzando il linguaggio PASCAL e ne hanno verificato gli esiti riportando i valori di $\langle X^2 \rangle$ in funzione delle diverse variabili su grafici realizzati con EXCEL.

Nell'immagine a lato è rappresentata la dipendenza di $\langle X^2 \rangle$ in funzione del tempo t che, in questo caso, è dato dal numero NT di urti simulati.



In una fase successiva del percorso, gli allievi MD e AF, avendo deciso di portare l'argomento all'esame di stato, hanno integrato il loro lavoro sperimentale realizzando anche la simulazione (sempre sulla traccia precedentemente descritta) con un linguaggio più evoluto (il LAB VIEW) che ha consentito anche di ottenere una rappresentazione grafica molto suggestiva del moto del granulo nel tempo, della dipendenza di $\langle X^2 \rangle$ dalle diverse variabili e infine della traiettoria del granulo corrispondente a un numero NR di passi.

L'immagine a lato rappresenta una traiettoria del granulo costituita da 50 passi. Il suo punto di partenza ha coordinate (0,0) e una sua parte è fuori campo.



INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

Sulla rivista *La Fisica nella scuola*, bollettino dell'Associazione per l'Insegnamento della Fisica (AIF), sono comparsi alcuni interessanti articoli relativi al moto browniano. Ne riportiamo di seguito gli estremi bibliografici in ordine cronologico.

C. Romagnino, L. Loy, *Lo studio del moto browniano: un esame della prima teoria di Einstein*, XXI, 3, 1988, pp. 107-112.

J. Turlo, *Uso di simulazioni per studiare il moto browniano*, XXVIII, 2, 1995, pp. 76-82.

P. Scatturin, *Determinazione della costante di Boltzmann attraverso misure dinamiche di moti browniani*, XXIX, 4, 1996, pp. 213-218.