GEOMETRIA NELL'ARTE

san vitale di ravenna

di Maria Santina Tampellini*

Incontrare la geometria nella scuola primaria: un'esperienza affascinante per i bambini e per l'insegnante, per le possibilità di mettere in atto la razionalità al di la delle attuali riduzioni intellettualistiche. Partire dall'osservazione della realtà (la chiesa visitata, i mosaici riprodotti a mano libera); compiere azioni specifiche (costruire poligoni con uno strumento, disegnare, comporre, preparare i segnalibri); usare il corpo (visitare, guardare, costruire, eccetera); provocare la nascita del pensiero attraverso la riflessione sull'esperienza (analisi dei particolari, ricostruzione del mosaico scoprendo relazioni tra gli angoli); incontrare nell'arte l'attribuzione di significati simbolici alle figure geometriche; verbalizzare le osservazioni e farne una sintesi comune; iniziare a memorizzare mediante sintesi finali; comunicare la propria esperienza (partecipazione a una mostra): questi in sintesi i punti salienti di metodo. Il racconto della maestra rivela come i bambini sono stati messi in azione dal contatto con la bellezza, fonte intrinseca di motivazione, e dalla possibilità di usare il proprio corpo. In matematica, partire dall'esperienza potenzia l'apprendimento, pur di non chiudercisi dentro, ed è una strada realmente percorribile, a patto di saper fare emergere il pensiero razionale

*Questo percorso di geometria è stato svolto dall'autore in una classe quarta della Scuola primaria statale "A.Saffi", I Circolo di Forlì, nell'anno scolastico 2006-2007.

Dal 1976 insegno nella scuola elementare, sono laureata in materie letterarie, ma da sempre appassionata di questioni matematiche. Dal 1995 lavoro in classi a tempo pieno e curo l'area logico-matematica (oltre a geografia, scienze, religione, immagine). Quotidianamente cerco di lasciarmi interrogare da ciò che emerge da domande, interessi, difficoltà dei miei alunni, perciò ho continuato a studiare la matematica e la sua didattica, partecipando a corsi proposti da varie associazioni e verificando quanto appreso nella pratica in classe.[1]

Nell'anno scolastico 2006-2007, all'interno di un gruppo di lavoro seguito da Silvia Sbaragli (dell'équipe di Bruno D'Amore), è nata la proposta di organizzare a Forlì un convegno di matematica (rivolto a insegnanti della scuola dell'infanzia, della scuola primaria e secondaria di primo grado), ac-

[1] Seguo da alcuni anni anche i convegni, le mostre, le iniziative di aggiornamento organizzate da Bruno d'Amore e dal gruppo Ricerca e Sperimentazione in Didattica e Divulgazione della Matematica (RSDDM) dell'Università di Bologna.

compagnato da una mostra di lavori svolti con le classi. Insegnavo in una classe quarta a tempo pieno (25 alunni, alcuni stranieri e un alunno con sostegno) e ho deciso di attuare, per proporla alla mostra, un'attività di ricerca sui pavimenti della basilica di San Vitale a Ravenna.

Questa basilica del VI secolo è universalmente conosciuta e visitata perché sulle pareti del presbiterio sono presenti mosaici bizantini di enorme importanza (l'imperatore Giustiniano, l'imperatrice Teodora, scene della Bibbia, decorazioni floreali); inoltre sono interessanti le pavimentazioni del XVI secolo (purtroppo in gran parte nascoste da panche e sedie), formate da figure geometriche realizzate con marmi e tessere antiche che creano un senso di armonia.

Non volevo proporre ai miei scolari un lavoro accanto a quello quotidiano sui poligoni, ma desideravo che imparassero a scoprirli con tutte le loro caratteristiche partendo dall'osservazione di quei mosaici marmorei. Desideravo valorizzare la loro esperienza personale mettendoli a contatto con una espressione di bellezza che creasse subito un impatto motivante allo studio che avrebbero intrapreso.

Prima fase: sul campo

Visita alla Basilica

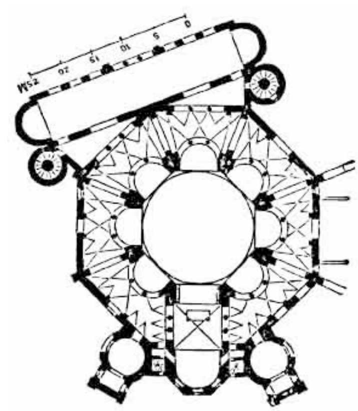
In una fredda mattina di febbraio, ci siamo recati in gita a Ravenna, accompagnati da una guida. A San Vitale abbiamo osservato attentamente

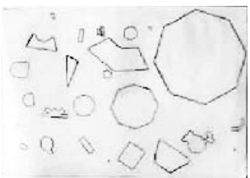
la struttura particolare della basilica, i famosi mosaici parietali, poi ci siamo dedicati ai pavimenti. Tramite la guida, avevo precedentemente chiesto alla Sovrintendenza alle Belle arti di permettere ai bambini di riprodurre con la matita su fogli bianchi alcune composizioni presenti sui pavimenti dell'ottagono centrale. Mi interessava infatti che avessero un contatto fisico con il materiale di cui avremmo tanto parlato, che toccassero le tessere, che osservassero i colori dei marmi, che ne rilevassero le imperfezioni, insomma che la loro corporeità fosse coinvolta.

Alla scoperta dell'ottagono

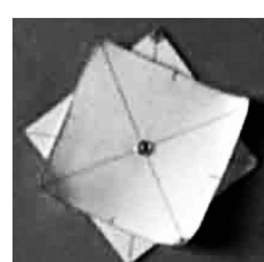
Seconda fase: in aula

In classe abbiamo osservato la pianta della basilica di San Vitale [Fiorentini, Orioli, 2003], riprodotta nell'immagine a lato.





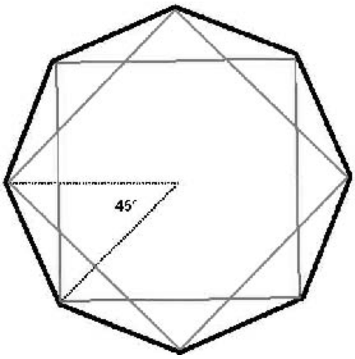
Come si vede nell'immagine a sinistra, usando la carta satinata, ogni alunno ha ripassato il contorno di «poligoni» e «non poligoni» presenti nella pianta. Abbiamo conversato a lungo sulle figure riprodotte, discutendo su quelle che si potevano considerare poligoni e perché. Questa attività è stata proposta come verifica di conoscenze già acquisite, poiché in precedenza avevamo classificato come «poligoni» le figure che hanno come confine una linea spezzata chiusa (cioè una linea chiusa formata da segmenti) e come «non poligoni» le figure che hanno come confine una linea mista chiusa (cioè una linea chiusa formata da segmenti e da tratti di linea curva). Dopo aver riconosciuto i poligoni, ne hanno contato i lati e hanno cominciato a nominarli: di alcuni conoscevano già il nome (triangolo, quadrato, rettangolo), di altri no (trapezio, esagono, ottagono).
A proposito dell'ottagono, hanno notato che ce n'era uno più piccolo dentro quello più grande. Ho chiesto di misurare la lunghezza dei lati e l'ampiezza degli angoli dell'ottagono maggiore, poi dell'ottagono minore: quando tutti si sono resi conto che in ogni ottagono i lati avevano la stessa lunghezza e gli angoli la stessa ampiezza, ho segnalato la convenienza dell'uso comune di aggiungere l'aggettivo «regolare» al nome ottagono per distinguere questo tipo dall'ottagono più generale (poligono regolare con otto lati).
Dalla successiva registrazione dei dati rilevati nei due ottagoni, qualcuno ha notato che in entrambi l'ampiezza degli angoli era la stessa.
A questo punto li ho aiutati a ricordare, e a fissare nella mente, ciò che avevano scoperto durante le attività di ingrandimento e riduzione di disegni su carta quadrettata che avevano eseguito nei mesi precedenti per familiarizzare con i concetti di similitudine (e «scala» in geografia).
Abbiamo imparato poi a conoscere meglio l'ottagono attraverso la costruzione di un modello dinamico, composto da due quadrati congruenti che ruotano attorno al centro di rotazione costituito dal punto di incontro delle diagonali.
Come si vede nell'immagine a lato ogni alunno ha realizzato il proprio modello usando carta per i due quadrati e un bottone automatico per permetterne la rotazione.



Lavorando a coppie, gli alunni hanno eseguito la consegna di far ruotare i due quadrati con angoli di rotazione diversi (10°- 20° - 30°- 40°- 45° - 50° - 60° - 70° - 80° - 90° - 100° - 110° - 120° - 130°), come era stato loro insegnato in una precedente attività sulle isometrie (simmetrie, rotazioni, traslazioni).

Ogni coppia, che aveva a disposizione un modello, ha segnato su un foglio i vertici dei due quadrati dopo averli ruotati uno sull'altro per una delle rotazioni indicate, ha poi unito con segmenti i punti individuati, infine ha ritagliato l'ottagono così ottenuto.
I 14 ottagoni realizzati da ogni coppia, corrispondenti alle 14 possibilità indicate per la rotazione, sono stati poi confrontati, mediante sovrapposizione, ne sono stati misurati i lati e gli angoli.
Dopo varie prove e discussioni in classe, ecco, nel riquadro, le scoperte degli alunni.

> Quando ruotiamo di 45° otteniamo un ottagono regolare.
> Se ruotiamo di 90° otteniamo un quadrato, perché i due quadrati si sovrappongono.
> Le rotazioni di angoli che hanno come somma 90° (40° e 50° oppure 30° e 60°, eccetera) formano ottagoni non regolari congruenti (lo abbiamo capito perché si sovrappongono perfettamente).
> Quando si supera la rotazione di 90°, si ricomincia da 0° (per esempio se si ruota di 110° è come ruotare di 20°).



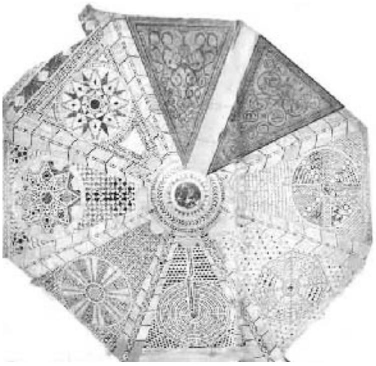
Infine, usando il proprio modello dinamico, ogni alunno ha disegnato e ritagliato un ottagono regolare, poi ne ha tracciato le diagonali.
A coppie, il loro lavoro è proseguito per rispondere alle domande poste da me e le cui risposte sono state trascritte sul quaderno di geometria.
«Quante sono le diagonali? Quante diagonali partono da ogni vertice? Quali poligoni formano? Sono concavi o convessi? Perché? Colora i poligoni che individui. Come si chiamano? Quale poligono vedi al centro?»
Siamo arrivati alle risposte definitive confrontando e correggendo le risposte di ciascuno, realizzando un lavoro di reinvenzione guidata [Freudenthal, 1994].
A questo punto dell'attività, è stato possibile introdurre gli alunni a un argomento di grande valore storico e culturale, a loro sconosciuto, rilevabile dall'architettura della chiesa, facendoli riflettere sul legame storico della matematica, e in particolare della geometria, con simboli cosmici nel mondo classico. In particolare, volevo che si accorgessero di come geometria e arte siano collegate e come attraverso l'uso di simboli gli uomini abbiano voluto rappresentare per analogia realtà presenti, ma non visibili fisicamente, come il rapporto fra Dio, l'uomo e il mondo.
Abbiamo esaminato il valore simbolico dei numeri quattro e otto nella tradizione cristiana all'interno della quale fu progettata e costruita la basilica di San Vitale.
Ecco i principali ruoli rivestiti da questi due numeri nel mondo classico.

Quattro è il numero cosmico

Con i suoi quattro punti cardinali, i quattro venti, i quattro elementi di cui è formato (aria, acqua, fuoco, terra), le quattro fasi della luna, le quattro stagioni, secondo Pitagora e i suoi seguaci il mondo si regge su un ordine «quadrato» che lo fissa su una posizione stabile all'interno del flusso del tempo.
Nella Sacra Scrittura, poi, quattro sono i fiumi del Paradiso, quattro sono i Vangeli, quattro sono le fasi della vita terrena di Cristo (incarnazione, passione, resurrezione, ascensione).

Otto è il numero dell'armonia perfetta

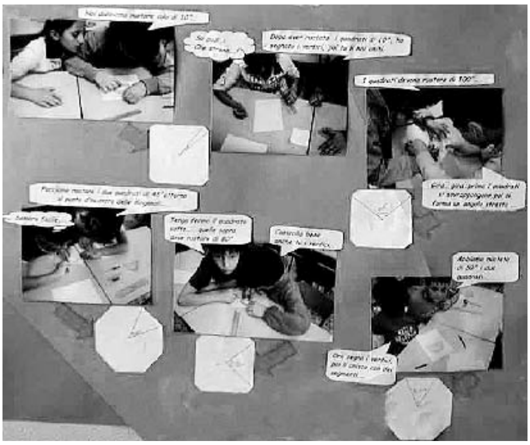
È l'ottava corda della cetra (il cui suono riproduce quello della prima, come in Cristo è racchiusa tutta la musica del Padre), è il giorno della resurrezione del Signore, è il numero delle beatitudini.
L'otto è il numero dell'equilibrio, rappresenta più compiutamente la rosa dei venti e definisce l'ottagono, figura che sta tra il quadrato e il cerchio, tra la terra e il cielo, evocante la resurrezione di Cristo [www.larici.it]; l'ottagono quindi rappresenta la mediazione tra il cerchio (Dio, la perfezione, il cielo) e il quadrato (la terra, gli uomini, la materia, l'imperfezione).
L'otto lega l'infinito al finito ed è un simbolo di rinascita, di resurrezione, di avvicinamento alla perfezione, usato anche per il fonte battesimale.
Graficamente, le due linee che formano la cifra simboleggiano, intersecandosi, il passaggio dalla vita terrena a quella spirituale e un «8» posto in orizzontale è il simbolo dell'infinito.
«Nella tradizione cristiana e islamica la figura dell'ottagono è uno dei principali simboli dell'arte e dell'architettura: molteplici le decorazioni e i templi a forma ottagonale. Alcuni edifici civili e militari presentano la forma ottagonale, il più mirabile esempio è Castel del Monte in Puglia. A livello architettonico non è un caso se dall'antica tradizione cristiana il fonte battesimale - che simboleggia rigenerazione e rinascita - ha quasi sempre la forma ottagonale» [www.antropologiaartesacra.it].
Dal punto di vista architettonico sono state lette ai bambini le interessanti osservazioni sotto riportate:
«[…] l'ottagono è una figura piana formata da due quadrati che si intersecano a 45°. Così gli ottagoni disegnati da pilastri, colonne e muri si sdoppiano idealmente, ma percettibilmente, ognuno in due quadrati […] Caratteristica delle chiese bizantine è appunto lo spazio dilatato[…] L'attuale pavimento è composto da otto spicchi, otto triangoli disposti intorno a un cerchio centrale, dei quali sei sono mozzati, gli altri due, gli originali, terminano a punta […] Oggi sul pavimento ci sono cinque triangoli smussati in punta, riempiti da cinque grandi fiori di pietra di tutti i colori che una natura fantasiosa sembra aver fatto sbocciare come in un prato. Quasi avessero le radici nell'ottagono della Basilica, questi fiori di marmo si schiudono con otto petali, otto raggi, così come le stelle dei mosaici del Mausoleo di Galla Placidia».



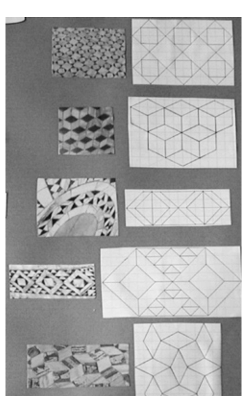
Terza fase: in aula

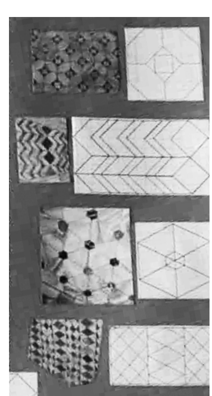
A caccia di poligoni

Abbiamo preso in considerazione i mosaici pavimentali che formano i sei spicchi dell'ottagono centrale realizzati nel XVI secolo (quindi i più recenti). Ho messo a disposizione di ogni alunno le foto dei particolari delle pavimentazioni, le abbiamo esaminate e confrontate con i loro schizzi eseguiti dal vero.



Ho chiesto ai bambini di individuare i poligoni già conosciuti e nominarli. Abbiamo utilizzato gli specchi per scoprire assi di simmetria nei poligoni e nelle loro composizioni. Contemporaneamente, sono state esaminate nel dettaglio le principali caratteristiche dei poligoni incontrati, classificandoli in base ai lati, agli angoli, agli assi di simmetria.
Ricercarli nelle pavimentazioni è stata una «caccia», a cui tutti hanno partecipato con entusiasmo: c'era chi sosteneva di aver scoperto un nuovo tipo di poligono, ma era solo un quadrato ruotato, altri hanno individuato nelle stelle che li avevano affascinati tanti rombi, quadrati, triangoli, disposti in vari modi, altri ancora si sono divertiti a contare quanti triangoli più piccoli stavano dentro un triangolo più grande. La possibilità di manipolare, osservare, ricercare, spostare ha permesso di fondare l'apprendimento in una esperienza personale, che ha reso ciascuno attento e interessato.
Successivamente, su un grande foglio di carta centimetrata, ci siamo messi all'opera tutti insieme per riprodurre una pavimentazione alla volta: chi voleva poteva venire a disegnare un poligono (lo doveva nominare e ricordare le caratteristiche che servono per tracciarlo usando riga e goniometro), accostarne un altro, poi un altro ancora, eccetera. I compagni, dal posto, commentavano, si mostravano d'accordo, dissentivano, potevano a turno venire a presentare la propria proposta, cercando di spiegarne il motivo.
Ero io la prima a stupirmi di quello che si formava sotto i nostri occhi avvicinando quelle semplici forme geometriche in modo personale.





Siamo riusciti a individuare e riprodurre 16 composizioni, alcune semplici, altre veramente complesse, che poi ogni alunno ha ricopiato sul proprio quaderno, sempre su carta centimetrata.
Mentre disegnavano e coloravano usando matita, righello e pastelli, i bambini

si fermavano ad osservare regolarità, composizioni sul piano e illusioni tridimensionali che variavano in base alle colorazioni date ai singoli poligoni.[2]
Alla fine, abbiamo realizzato schede sintetiche (chiamate Carta d'identità) dei vari poligoni, utilizzando le numerose osservazioni degli alunni (emerse durante l'attività sulle pavimentazioni) che a turno i bambini stessi avevano annotato su un grande foglio sul quale tutti potevano intervenire per aggiungere o per correggere.

[2] Ho ritenuto opportuno utilizzare carta centimetrata, e non fogli bianchi, perché, sebbene i bambini in quarta inizino a tracciare poligoni con righello, squadra e goniometro, pensavo che diventasse troppo impegnativo disegnare figure così precise.

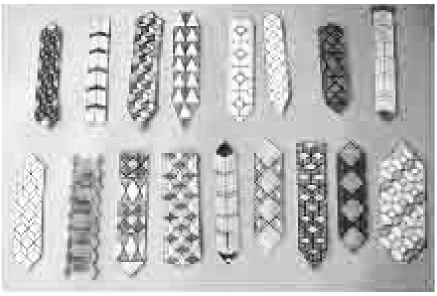
Ricostruire le pavimentazioni

Quarta fase: nel laboratorio

A coppie gli alunni hanno scelto una composizione da ricostruire, hanno ingrandito i poligoni, sempre su carta centimetrata, senza deformarli, raddoppiando o triplicando la lunghezza dei lati corrispondenti, ma stando attenti a conservare l'ampiezza degli angoli. Con questa attività hanno fissato sempre più nella mente i concetti legati alla similitudine, già esplorati con i due ottagoni regolari esaminati in precedenza.
In seguito hanno riprodotto su cartoncini (dai colori scelti da loro), le sagome dei poligoni necessari per realizzare la composizione, li hanno ritagliati e incollati con precisione sul disegno in modo da ricoprire tutta la superficie ottenendo così riproduzioni fedeli di piccole parti scelte nel pavimento originale.
Quando il lavoro è finito, ho richiesto di misurare le ampiezze degli angoli che avevano il vertice in comune e di sommarle fra loro.
Man mano che i calcoli venivano completati, ci si accorgeva che la somma era sempre 360°: questo ha suscitato sorpresa in alcuni, per altri invece è stata una conferma di considerazioni fatte mentre si misurava.

Al termine, insieme, si è giunti a concludere che per ricoprire (senza buchi e senza sovrapposizioni) un pavimento con i poligoni, la somma degli angoli che hanno il vertice in comune deve essere sempre di 360°, cioè un angolo giro. E quindi non si può fare una pavimentazione usando poligoni qualsiasi.
In seguito ho proposto agli alunni di riprodurre, interpretandole liberamente, parti di composizioni sui fogli di carta quadrettata dei loro quaderni per realizzare segnalibri da offrire ai visitatori della mostra.

I bambini hanno disegnato e colorato, in breve tempo, moltissimi segnalibri (circa 200) che sono stati poi ritagliati e plastificati e che hanno riscosso un grande successo fra bambini, genitori e insegnanti dei vari ordini di scuola che si sono recati alla manifestazione.
Eccone alcuni.



Considerazioni finali

Alla fine di questa attività, iniziata a febbraio e terminata a giugno, ho verificato che i bambini hanno imparato:
a riconoscere e disegnare triangoli di vario tipo (quadrati, rombi, parallelogrammi, esagoni, trapezi eccetera) in qualsiasi posizione fossero, eliminando alcune fissità che si erano formate durante il precedente insegnamento della geometria; ad applicare operativamente i concetti di perpendicolarità e parallelismo; a riconoscere con sicurezza le eventuali simmetrie presenti in una figura piana e in composizioni di poligoni; a consolidare le attività di misurazione degli angoli interni ed esterni dei poligoni attraverso un uso sempre più consapevole del goniometro; a scoprire le regole per effettuare ricoprimenti di superfici usando tasselli poligonali; comprendere in situazioni di gioco il concetto di superficie (distinguendolo da quello di confine); a riconoscere l'equiestensione di figure piane mediante scomposizioni e ricomposizioni; a sperimentare come la disposizione ordinata di figure geometriche semplici e di colore diverso possa determinare motivi decorativi piacevoli. ❖

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE E SITOGRAFICHE
H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica* , La Scuola, Brescia 1994.
R. Manara, *La matematica e la realtà*, Marietti, Milano-Genova 2002.
A. Cerasoli, *Mister Quadrato*, Sperling & Kupfer, Milano 2005.
G. Arrigo, S.Sbaragli, *I solidi*, Carocci Faber, Roma 2005.
B. D'Amore, *Geometria*, Franco Angeli, Milano 1997.
B. D'Amore, *Matematica dappertutto*, Pitagora, Bologna 2007.
B. D'Amore, M.I. Fandiño Pinilla, I. Marazzani, S. Sbaragli, *La didattica e le difficoltà in matematica*, Erickson, Gardolo (Tn) 2008.
Sezione Mathesis di Pesaro, NRD Parma, *Modelli dinamici e nuclei fondanti nell'insegnamento della matematica*, Atti Convegno Nazionale UMI-CIIM, Salsomaggiore 2000.
I. Fiorentini, P. Orioli, *I marmi antichi di San Vitale*, Edit Faenza 2003.
O. Beigbeder, *Lessico dei simboli medievali*, Jaca Book, Milano1989.
www.larici.it
www.arte-click.it
www.antropologiaartesacra.it