in una tabella, dove nella colonna di sinistra scriviamo il numero di confezioni e nella colonna di destra il numero di vasetti corrispondenti.

Confezioni	**Vasetti yogurt**
1	6
2	12
3	18
....	....

Abbiamo così rappresentato in modo schematico la «corrispondenza» tra le due classi di misure. Il numero che corrisponde a 1 (una confezione), cioè 6 (sei vasetti di yogurt), si chiama «valore unitario» della corrispondenza. Una riga individua potenzialmente tutta la tabella; il valore unitario si può ricavare su qualsiasi riga dividendo il numero di vasetti di yogurt (a destra) per il numero delle confezioni (a sinistra): 12 : 2 = 18 : 3 = 6. Osserviamo quindi che il rapporto tra i due numeri di una stessa riga è costante ed è proprio il valore unitario della corrispondenza.
Osserviamo ora i numeri scritti nella colonna di destra: essi sono i multipli di 6, valore unitario. Questo è dunque un elemento chiave nella comprensione della genesi formale della tabella, cioè per la scrittura sia della seconda colonna che di una riga generica.

Confezioni	**Vasetti yogurt**
1	6
2	12
....	....
n	6n

Il numero di vasetti di yogurt contenuto in n confezioni si ricava moltiplicando il valore unitario (6) per il numero di confezioni: (6n).
Se invece si conosce un numero della seconda colonna, per esempio 48 (che è multiplo di 6), il numero di confezioni (8) si può ricavare con la divisione 48 : 6 .

Confezioni	**Vasetti yogurt**
1	6
x	48

In conclusione, per passare dal numero di vasetti di yogurt (48) al numero di confezioni (8), occorre una divisione in verticale; in generale se si hanno 6n vasetti di yogurt, si trova il numero n di confezioni con una divisione in verticale sulla seconda colonna.
Abbiamo così esaminato rispetto alla tabella il significato di due divisioni, una in orizzontale e una in verticale. Utilizziamo ora queste osservazioni.

PROBLEMA 2

Voglio confezionare 30 yogurt in confezioni da 6 vasetti ciascuna, quante confezioni ottengo?

La corrispondenza è ancora tra l'insieme delle confezioni e l'insieme dei vasetti di yogurt (o meglio tra le due classi di misure collegate) con lo stesso valore unitario, quindi si tratta della stessa corrispondenza del problema precedente. Possiamo rappresentare il problema:

A) in modo spontaneo, disegnando 30 simboli, suddividendoli in gruppi da 6 e contando poi i gruppi ottenuti;

B) in modo convenzionale, con una tabella, mettendo una x (o un punto interrogativo) dove manca l'informazione:

Confezioni	Vasetti yogurt
1	6
x	30

La soluzione cercata è il numero 5, ottenuto dalla divisione 30 : 6, che sfrutta i rapporti verticali. Anche qui i 3 numeri sono di natura diversa:

30 è il numero complessivo di vasetti;

6 è il numero di vasetti contenuto in 1 confezione (valore unitario);

5 è il numero di confezioni.

Per indicare nell'operazione la natura dei numeri, possiamo inserire sotto i numeri i simboli usati precedentemente nel *Problema 1*:

30 : 6 = 5

◆ ● ❤

I due numeri 30 e 6 si trovano nella stessa colonna della tabella, ma non sono del tutto identici perché 30 è un numero complessivo di vasetti mentre 6 è un numero di vasetti per ogni confezione; il risultato è il numero di confezioni, che va inserito nella prima colonna della tabella.

PROBLEMA 3

Ho acquistato 24 yogurt in 4 confezioni, quanti vasetti contiene ciascuna confezione?

Si tratta ancora di una corrispondenza tra confezioni e vasetti di yogurt, ma non sappiamo se è la stessa dei due problemi precedenti perché non conosciamo il suo valore unitario, che è appunto ciò che si chiede di trovare. Per rappresentare il problema possiamo:

A) in modo spontaneo, disegnare 4 contenitori, poi distribuire i vasetti uno a uno dentro i contenitori e alla fine contare quanti ce ne sono in ciascuno di essi;

B) in modo convenzionale, utilizzare una tabella di corrispondenza mettendo una x (o un punto interrogativo) dove manca l'informazione:

Confezioni	Vasetti yogurt
1	x
4	24

La soluzione è il numero 6, ottenuto con la divisione 24 : 4, che sfrutta il rapporto orizzontale. I significati dei numeri presenti nell'operazione sono:

24 è il numero complessivo di vasetti;

4 è il numero di confezioni;

6 è il numero di vasetti di una confezione.

Possiamo anche in questo caso corredare l'operazione di simboli (secondo la stessa legenda):

24 : 4 = 6

◆ ❤ ●

I due numeri 24 e 4 si trovano sulla stessa riga della tabella e non sono della stessa natura: 24 è un numero complessivo di vasetti, 4 è un numero di confezioni. Il risultato della divisione è il numero di vasetti per confezione (valore unitario).

Lettura comparativa dei risultati

Abbiamo considerato una stessa corrispondenza tra confezioni e vasetti di yogurt, ma ponendo tre diverse domande.
La prima si risolve con una moltiplicazione, la seconda e la terza con due diverse divisioni.
Schematizziamo le situazioni di corrispondenza.

Problema 1: individuare il numero complessivo di vasetti di yogurt;

Problema 2: individuare il numero di confezioni;

Problema 3: individuare il contenuto di una confezione (o valore unitario).

Trovata la risposta, c'è un modo immediato di verificare se le situazioni sono davvero queste: controllare la «marca» con cui abbiamo segnato il risultato delle operazioni in ciascun problema.

Problema 1 $\quad \underset{\bullet}{6} \cdot \underset{\heartsuit}{3} = \underset{\blacklozenge}{18}$

Problema 2 $\quad \underset{\blacklozenge}{30} : \underset{\bullet}{6} = \underset{\heartsuit}{5}$

Problema 3 $\quad \underset{\blacklozenge}{24} : \underset{\heartsuit}{4} = \underset{\bullet}{6}$

Tornando alla legenda iniziale, si nota per ciascun risultato la corrispondenza dei segni alla natura dei numeri che si volevano individuare.
Si osserva che in ciascuno dei tre risultati compaiono i tre segni grafici, posti in ordine diverso.

Un'altra convenzione possibile

Invece di corredare ciascun numero con un segno arbitrario, il cui significato è registrato in una legenda, esiste un'altra via per raggiungere lo stesso risultato chiarificatore della natura del risultato.
Si può utilizzare un calcolo analogo a quello ben conosciuto in fisica, in cui ciascun numero è accompagnato da una «marca» che indica la sua natura, e associare al calcolo sui numeri un calcolo formale sulle marche, appositamente inventato in modo che rispetti le stesse proprietà delle operazioni tra i numeri.

Problema 1
Nei due casi numerici esaminati:
6 • 3 = 18 diventa: 6 v/c • 3 c = 18 v (dove si pone: v/c • c = v)
● ❤ ◆
6 • 15 = 90 diventa analogamente: 6 v/c • 15 c = 90 v (stesso calcolo sulle marche)
● ❤ ◆

Problema 2
30 : 6 = 5 diventa: 30 v : 6 v/c = 5 c (dove si pone: v : v/c = v • c/v = c)
◆ ● ❤

Problema 3
24 : 4 = 6 diventa: 24 v : 4 c = 6 v/c (dove si pone: v : c = v/c)
◆ ❤ ●

Legenda:
v sta per «vasetti di yogurt»;
v/c sta per «vasetti di yogurt per confezione»;
c sta per «confezioni».

Conclusione

I tre problemi esaminati sono abbastanza semplici e ciò permette di proporli agli allievi anche nelle prime classi della scuola primaria.
Il valore che ho dato loro in questa esposizione non è di arrivare al risultato, cosa che si può fare in modi diversi, e neanche di introdurre precocemente un calcolo formale sulle dimensioni, ma di fare osservazioni che portano a chiarificare e dare senso ad alcuni aspetti formali della matematica.
Dunque il modo con cui ho trattato questo contenuto, indica che nelle mie intenzioni gli allievi sono a un livello successivo a quello della prima risoluzione per tentativi dei problemi, con rappresentazioni libere. I punti di riflessione che propongo agli insegnanti possono inserirsi in vari momenti del cammino scolastico, e ciascun insegnante può inserire gli elementi indicati in un suo specifico metodo.
È chiaro che io saprei bene quale metodo privilegiare a seconda dell'età e della competenza degli allievi, sempre restando dentro la grande idea della «reinvenzione guidata», ma questa volta lo scopo specifico è di riflettere con gli insegnanti sui contenuti.
Mi farebbe molto piacere ricevere comunicazione di esperienze messe in atto dopo la lettura dell'articolo. ❖

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE
Freudenthal Hans, 1994, *Ripensando l'educazione matematica*, La Scuola, Brescia.
Vergnaud Gerard, 1994, *Il bambino, la matematica, la realtà*, Armando, Roma.