IL CASO DELLE CORRISPONDENZE

nei problemi con moltiplicazione e divisione alla primaria

di Anna Paola Longo

Questo articolo vuole chiarire la struttura soggiacente ad alcuni problemi di moltiplicazione e di divisione. L'autore limita il campo della riflessione ai numeri naturali molto piccoli perché in questa sede intende unicamente esemplificare la struttura: il lettore potrà passare a numeri interi grandi e a numeri razionali. Scopo del lavoro da proporre agli allievi è mostrare la natura delle corrispondenze e lo schema con cui si possono rappresentare, sul quale ci si può orientare con facilità in molti casi di problemi con moltiplicazioni e divisioni. L'argomento può essere iniziato nella scuola primaria e ripreso nella scuola secondaria di primo grado, ma non è da escludere a priori dal biennio della scuola superiore. Le indicazioni didattiche, del tutto generali, possono essere precisate a seconda del livello scolastico e del percorso eventualmente già attuato.

Il concetto di corrispondenza è molto generale. La parola deriva dal latino medievale «correspondere», composto di *cum* (con, insieme) e *respondere* (rispondere) che significa «essere conforme». In matematica due insiemi (che possiamo chiamare A e B) di elementi (non necessariamente della stessa natura) sono posti in corrispondenza se a elementi dell'uno vengono associati (cioè corrispondono) elementi dell'altro. Attraverso una corrispondenza si formano coppie ordinate di elementi (a, b) dove a appartiene ad A e b appartiene a B ($a \in A, b \in B$).

Una corrispondenza in cui a ogni elemento di A corrisponde un solo elemento di B, si dice funzione f di A su B. In questo caso la corrispondenza si dice univoca da A verso B; se la si rappresenta con un diagramma a frecce, da ogni elemento di A parte una freccia e questa freccia è unica. Su alcuni elementi di B possono arrivare molte frecce: vuol dire che parecchi elementi di A hanno lo stesso corrispondente in B.

Una corrispondenza si dice biunivoca se a ogni elemento di A corrisponde un solo elemento di B e viceversa (quindi è univoca sia da A verso B che da B verso A). Se la si interpreta con il linguaggio delle funzioni, essa determina sia una funzione f di A su B che una funzione g di B su A e le due funzioni f e g si dicono una l'inversa dell'altra. Se si usa come rappresentazione

un diagramma a frecce, da ogni elemento di A parte una, e una sola freccia, e ogni elemento di B è raggiunto da una, e una sola freccia.
I casi che esamineremo di seguito riguardano invece corrispondenze in cui a ogni elemento di un insieme corrispondono più elementi dell'altro. Esse si dicono «plurivoche» o «non univoche» (questo fatto può capitare andando da A verso B, oppure da B verso A, oppure in entrambi i versi).

PROBLEMA 1

In ogni confezione ci sono 6 vasetti di yogurt, quanti vasetti ci sono in 3 confezioni?

La corrispondenza è tra l'insieme A delle confezioni e l'insieme B dei vasetti di yogurt. Non è una corrispondenza univoca perché a ogni elemento del primo insieme ne corrispondono 6 del secondo.
Essa subordina una corrispondenza tra numeri appartenenti a due diversi insiemi di misure: il numero di confezioni (1, 2, 3, ... , n, ...) e il numero di vasetti (6, 12, 18, ..., 6n, ...).
Per risolvere il problema assegnato, gli allievi possono partire da una rappresentazione libera.
Le rappresentazioni libere più probabili sono di questo tipo:

```
** ** **
** ** **
** ** **
```

dove ciascun asterisco rappresenta un vasetto di yogurt e ciascuna colonna (doppia) rappresenta una confezione.
Sono possibili alcune semplici variazioni come, per esempio, questa:

```
* * * * * *
* * * * * *
* * * * * *
```

dove ciascuna riga rappresenta una confezione.
Qualche alunno potrebbe disegnare 3 mucchietti di yogurt senza allinearli e riesce ugualmente a ragionare sul disegno, ma la schematizzazione facilita certamente il riconoscimento della struttura, soprattutto quando aumentano i numeri.
I disegni precedenti indicano che ci sono 3 «gruppi» di vasetti di yogurt.
Per sapere il numero totale di vasetti si potrebbe restare nella struttura additiva facendo una somma ripetuta: $6 + 6 + 6 = 18$, dove:
6 rappresenta il numero di vasetti per confezione;
18 rappresenta il numero complessivo di vasetti.
Possiamo facilmente indicare la natura del numero nell'operazione per mezzo di simboli.

$$\underset{\bullet}{6} + \underset{\bullet}{6} + \underset{\bullet}{6} = \underset{\blacklozenge}{18}$$

Legenda
● numero di vasetti per confezione;
◆ numero complessivo di vasetti.

Se un allievo ha già imparato che la somma ripetuta si può scrivere più brevemente come una moltiplicazione, può indicare la soluzione con la moltiplicazione: $6 \bullet 3 = 18$.
Qui i numeri 6 e 18 hanno ancora il significato precedente, ma oltre a essi compare anche il numero 3, che ha un altro significato: indica quante volte compariva il 6 nell'addizione, e cioè il numero di confezioni.
Possiamo segnalare questi significati in modo semplice mediante alcuni segni grafici e una legenda:
❤ numero di confezioni;
● numero di vasetti per confezione;
◆ numero complessivo di vasetti;

$$\underset{\bullet}{6} \bullet \underset{\heartsuit}{3} = \underset{\blacklozenge}{18}$$

Quando questi due modi di procedere si applicano a numeri più grandi, si riconosce che la scrittura moltiplicativa è una grande semplificazione.
Supponiamo che le confezioni siano 15; la rappresentazione additiva può essere questa:

```
**  **  **  **  **  **  **  **  **  **  **  **  **  **  **
**  **  **  **  **  **  **  **  **  **  **  **  **  **  **
**  **  **  **  **  **  **  **  **  **  **  **  **  **  **
```

Per sapere quanti sono complessivamente i vasetti di yogurt si potrebbe usare una somma ripetuta, con gli stessi segni grafici che specificano la natura dei numeri:

$$\underset{\bullet}{6} + \underset{\bullet}{6} + \underset{\bullet}{6} + \underset{\bullet}{6} + \underset{\bullet}{6} + \underset{\bullet}{6} + \underset{\bullet}{6} + \underset{\bullet}{6} + \underset{\bullet}{6} + \underset{\bullet}{6} + \underset{\bullet}{6} + \underset{\bullet}{6} + \underset{\bullet}{6} + \underset{\bullet}{6} + \underset{\bullet}{6} = \underset{\blacklozenge}{90}$$

Ma è molto più agevole usare la moltiplicazione

$$\underset{\bullet}{6} \bullet \underset{\heartsuit}{15} = \underset{\blacklozenge}{90}$$

conservando gli stessi segni grafici precedenti.

Una rappresentazione convenzionale

È possibile utilizzare una freccia per indicare le parole «corrisponde» o «corrispondono»:

$1 \rightarrow 6$ (si legge: a una confezione corrispondono 6 vasetti)
$2 \rightarrow 12$ (si legge: a due confezioni corrispondono 12 vasetti)
$3 \rightarrow 18$, (si legge: a tre confezioni corrispondono 18 vasetti), eccetera.

Ma per ricordare cosa rappresentano i numeri scritti, essi si possono inserire in una tabella, dove nella colonna di sinistra scriviamo il numero di confezioni e nella colonna di destra il numero di vasetti corrispondenti.

Confezioni	Vasetti yogurt
1	6
2	12
3	18
....	....

Abbiamo così rappresentato in modo schematico la «corrispondenza» tra le due classi di misure. Il numero che corrisponde a 1 (una confezione), cioè 6 (sei vasetti di yogurt), si chiama «valore unitario» della corrispondenza. Una riga individua potenzialmente tutta la tabella; il valore unitario si può ricavare su qualsiasi riga dividendo il numero di vasetti di yogurt (a destra) per il numero delle confezioni (a sinistra): 12 : 2 = 18 : 3 = 6. Osserviamo quindi che il rapporto tra i due numeri di una stessa riga è costante ed è proprio il valore unitario della corrispondenza.
Osserviamo ora i numeri scritti nella colonna di destra: essi sono i multipli di 6, valore unitario. Questo è dunque un elemento chiave nella comprensione della genesi formale della tabella, cioè per la scrittura sia della seconda colonna che di una riga generica.

Confezioni	Vasetti yogurt
1	6
2	12
....	....
n	6n

Il numero di vasetti di yogurt contenuto in n confezioni si ricava moltiplicando il valore unitario (6) per il numero di confezioni: (6n).
Se invece si conosce un numero della seconda colonna, per esempio 48 (che è multiplo di 6), il numero di confezioni (8) si può ricavare con la divisione 48 : 6 .

Confezioni	Vasetti yogurt
1	6
x	48

In conclusione, per passare dal numero di vasetti di yogurt (48) al numero di confezioni (8), occorre una divisione in verticale; in generale se si hanno 6n vasetti di yogurt, si trova il numero n di confezioni con una divisione in verticale sulla seconda colonna.
Abbiamo così esaminato rispetto alla tabella il significato di due divisioni, una in orizzontale e una in verticale. Utilizziamo ora queste osservazioni.

PROBLEMA 2

Voglio confezionare 30 yogurt in confezioni da 6 vasetti ciascuna, quante confezioni ottengo?

La corrispondenza è ancora tra l'insieme delle confezioni e l'insieme dei vasetti di yogurt (o meglio tra le due classi di misure collegate) con lo stesso valore unitario, quindi si tratta della stessa corrispondenza del problema precedente. Possiamo rappresentare il problema:

A) in modo spontaneo, disegnando 30 simboli, suddividendoli in gruppi da 6 e contando poi i gruppi ottenuti;

B) in modo convenzionale, con una tabella, mettendo una x (o un punto interrogativo) dove manca l'informazione:

Confezioni	Vasetti yogurt
1	6
x	30

La soluzione cercata è il numero 5, ottenuto dalla divisione 30 : 6, che sfrutta i rapporti verticali. Anche qui i 3 numeri sono di natura diversa:

30 è il numero complessivo di vasetti;

6 è il numero di vasetti contenuto in 1 confezione (valore unitario);

5 è il numero di confezioni.

Per indicare nell'operazione la natura dei numeri, possiamo inserire sotto i numeri i simboli usati precedentemente nel *Problema 1*:

30 : 6 = 5

◆ ● ❤

I due numeri 30 e 6 si trovano nella stessa colonna della tabella, ma non sono del tutto identici perché 30 è un numero complessivo di vasetti mentre 6 è un numero di vasetti per ogni confezione; il risultato è il numero di confezioni, che va inserito nella prima colonna della tabella.

PROBLEMA 3

Ho acquistato 24 yogurt in 4 confezioni, quanti vasetti contiene ciascuna confezione?

Si tratta ancora di una corrispondenza tra confezioni e vasetti di yogurt, ma non sappiamo se è la stessa dei due problemi precedenti perché non conosciamo il suo valore unitario, che è appunto ciò che si chiede di trovare. Per rappresentare il problema possiamo:

A) in modo spontaneo, disegnare 4 contenitori, poi distribuire i vasetti uno a uno dentro i contenitori e alla fine contare quanti ce ne sono in ciascuno di essi;

B) in modo convenzionale, utilizzare una tabella di corrispondenza mettendo una x (o un punto interrogativo) dove manca l'informazione:

Confezioni	Vasetti yogurt
1	x
4	24

La soluzione è il numero 6, ottenuto con la divisione 24 : 4, che sfrutta il rapporto orizzontale. I significati dei numeri presenti nell'operazione sono:

24 è il numero complessivo di vasetti;

4 è il numero di confezioni;

6 è il numero di vasetti di una confezione.

Possiamo anche in questo caso corredare l'operazione di simboli (secondo la stessa legenda):

24 : 4 = 6

◆ ❤ ●

I due numeri 24 e 4 si trovano sulla stessa riga della tabella e non sono della stessa natura: 24 è un numero complessivo di vasetti, 4 è un numero di confezioni. Il risultato della divisione è il numero di vasetti per confezione (valore unitario).

Lettura comparativa dei risultati

Abbiamo considerato una stessa corrispondenza tra confezioni e vasetti di yogurt, ma ponendo tre diverse domande.
La prima si risolve con una moltiplicazione, la seconda e la terza con due diverse divisioni.
Schematizziamo le situazioni di corrispondenza.

Problema 1: individuare il numero complessivo di vasetti di yogurt;

Problema 2: individuare il numero di confezioni;

Problema 3: individuare il contenuto di una confezione (o valore unitario).

Trovata la risposta, c'è un modo immediato di verificare se le situazioni sono davvero queste: controllare la «marca» con cui abbiamo segnato il risultato delle operazioni in ciascun problema.

Problema 1 $6 \cdot 3 = 18$
● ❤ ◆

Problema 2 $30 : 6 = 5$
◆ ● ❤

Problema 3 $24 : 4 = 6$
◆ ❤ ●

Tornando alla legenda iniziale, si nota per ciascun risultato la corrispondenza dei segni alla natura dei numeri che si volevano individuare.
Si osserva che in ciascuno dei tre risultati compaiono i tre segni grafici, posti in ordine diverso.

Un'altra convenzione possibile

Invece di corredare ciascun numero con un segno arbitrario, il cui significato è registrato in una legenda, esiste un'altra via per raggiungere lo stesso risultato chiarificatore della natura del risultato.
Si può utilizzare un calcolo analogo a quello ben conosciuto in fisica, in cui ciascun numero è accompagnato da una «marca» che indica la sua natura, e associare al calcolo sui numeri un calcolo formale sulle marche, appositamente inventato in modo che rispetti le stesse proprietà delle operazioni tra i numeri.

Problema 1
Nei due casi numerici esaminati:
$6 \cdot 3 = 18$ diventa: $6\ v/c \cdot 3\ c = 18\ v$ (dove si pone: $v/c \cdot c = v$)
● ❤ ◆
$6 \cdot 15 = 90$ diventa analogamente: $6\ v/c \cdot 15\ c = 90\ v$ (stesso calcolo sulle marche)
● ❤ ◆

Problema 2
$30 : 6 = 5$ diventa: $30\ v : 6\ v/c = 5\ c$ (dove si pone: $v : v/c = v \cdot c/v = c$)
◆ ● ❤

Problema 3
$24 : 4 = 6$ diventa: $24\ v : 4\ c = 6\ v/c$ (dove si pone: $v : c = v/c$)
◆ ❤ ●

Legenda:
v sta per «vasetti di yogurt»;
v/c sta per «vasetti di yogurt per confezione»;
c sta per «confezioni».

Conclusione

I tre problemi esaminati sono abbastanza semplici e ciò permette di proporli agli allievi anche nelle prime classi della scuola primaria.
Il valore che ho dato loro in questa esposizione non è di arrivare al risultato, cosa che si può fare in modi diversi, e neanche di introdurre precocemente un calcolo formale sulle dimensioni, ma di fare osservazioni che portano a chiarificare e dare senso ad alcuni aspetti formali della matematica.
Dunque il modo con cui ho trattato questo contenuto, indica che nelle mie intenzioni gli allievi sono a un livello successivo a quello della prima risoluzione per tentativi dei problemi, con rappresentazioni libere. I punti di riflessione che propongo agli insegnanti possono inserirsi in vari momenti del cammino scolastico, e ciascun insegnante può inserire gli elementi indicati in un suo specifico metodo.
È chiaro che io saprei bene quale metodo privilegiare a seconda dell'età e della competenza degli allievi, sempre restando dentro la grande idea della «reinvenzione guidata», ma questa volta lo scopo specifico è di riflettere con gli insegnanti sui contenuti.
Mi farebbe molto piacere ricevere comunicazione di esperienze messe in atto dopo la lettura dell'articolo. ❖

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE
Freudenthal Hans, 1994, *Ripensando l'educazione matematica*, La Scuola, Brescia.
Vergnaud Gerard, 1994, *Il bambino, la matematica, la realtà*, Armando, Roma.