

IL TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

una verifica sperimentale

di Michele Donvito e Barbara Gandolfi*

In una situazione dei licei in cui il laboratorio di fisica, per scarsità di fondi, per limiti di orario, e non di rado per una scarsa disponibilità degli stessi docenti, è usato in modo limitato nell'attività didattica, l'esperienza che viene presentata costituisce un significativo controesempio. Si tratta di un vero e proprio progetto che implica anche la costruzione di una parte dell'apparato sperimentale, per la verifica di una relazione che riguarda il periodo di rotazione di un corpo rigido.

Abbiamo preso questa iniziativa, in una classe quarta, per far sì che gli alunni facessero esperienza personale della dinamica del corpo rigido, argomento affascinante e molto complesso; in particolare ci siamo soffermati sul concetto di momento di inerzia, precedentemente introdotto in classe e studiato sul libro di testo. A questo proposito, abbiamo riprodotto la verifica sperimentale del teorema di Huygens-Steiner, che normalmente ci si limita a trattare a livello teorico.

Le tappe del progetto

L'attività svolta con gli alunni si può riassumere nel modo seguente.

Si è proceduto alla costruzione di un pendolo di torsione (con le modalità che verranno descritte in seguito); abbiamo poi studiato le equazioni del pendolo di torsione; abbiamo eseguito un calcolo algebrico, per semplificare la relazione da verificare sperimentalmente. In tal modo gli studenti hanno potuto rendersi conto che le regole dell'algebra sono utili e diventano uno strumento acuto, potente e adeguato per la comprensione della fisica.

Successivamente siamo passati all'esperimento vero e proprio, cioè la verifica sperimentale, entro gli errori di misura, della validità del teorema di Huygens-Steiner; in particolare abbiamo verificato che il pendolo di torsione si muove di moto armonico; infine abbiamo eseguito la stima dell'errore che richiede la conoscenza della propagazione degli errori e della *standard deviation*.

Con questa attività sperimentale abbiamo voluto approfondire la dinamica

*Docenti di Matematica e Fisica del Liceo Scientifico Statale "A. Gramsci" di Firenze. L'attività sperimentale è stata realizzata nella classe IV C nell'anno scolastico 2009-2010, in preparazione al concorso *ScienzaFirenze 2010*.

Christian Huygens (1629-1695) matematico, astronomo e fisico olandese





A lato: Jacob Steiner (1796-1863) matematico svizzero

del corpo rigido: sul piano concettuale riprendendo le grandezze angolari, il moto circolare, il moto armonico, il momento di una forza, il momento di inerzia; sul piano operativo realizzando misure di tempo (misura del periodo del pendolo di torsione) e l'analisi degli errori.

La realizzazione del progetto, nel periodo novembre 2009 - febbraio 2010, ha richiesto cinque lezioni in orario curriculare e sei incontri di due ore, in orario extra-curriculare, tra i gruppi di lavoro costituiti all'interno della classe e il docente coordinatore.

BREVI CENNI STORICI SUL MOMENTO DI INERZIA

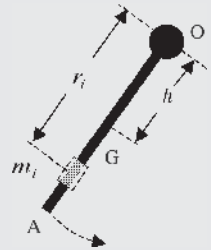
Christian Huygens, nelle sue opere, studia il «pendolo fisico» costituito da un'asta omogenea OA di lunghezza l , libera di ruotare in un piano verticale attorno al suo estremo O.

Egli individua che la durata delle piccole oscillazioni di tale pendolo dipende dai due fattori seguenti.

Il momento di inerzia: $\sum_{i=1}^N m_i r_i^2$, dove m_i è la massa elementare in cui si suddivide l'asta

OA, mentre r_i è la distanza di tale massa infinitesima m_i dal centro di rotazione O;

l'energia potenziale gravitazionale mgh in cui m è la massa totale del pendolo composto, h è la distanza tra centro di rotazione O e il centro di massa G dell'asta.

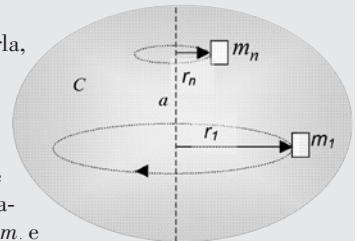


Infatti il periodo di oscillazione è: $T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N m_i r_i^2}{m g h}}$.

Da notare che Huygens utilizza la quantità $\sum_{i=1}^N m_i r_i^2$ senza denominarla, infatti è stato Eulero, più tardi, nel 1730, che ha chiamato tale quantità «momento di inerzia»

Il momento di inerzia I di un corpo rigido C rispetto a un asse di rotazione fisso a viene definito nel modo seguente. Sia C un corpo rigido di forma qualunque, dividiamo idealmente il corpo in tante piccole masse elementari m_i e siano r_i le distanze dall'asse a di tali masse; si definisce momento di inerzia I

del corpo C rispetto all'asse a la quantità: $\sum_{i=1}^N m_i r_i^2$.



Dinamica del pendolo di torsione

Per arrivare alla verifica sperimentale del periodo del pendolo di torsione da noi costruito, occorre richiamare alcuni elementi di dinamica rotatoria.

Il moto di un punto materiale di massa m su di una circonferenza di raggio R

viene semplicemente descritto mediante grandezze angolari: l'angolo $\varphi(t)$, funzione del tempo t , formato dal raggio vettore con una retta di riferimento; la velocità angolare $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$; l'accelerazione angolare $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$. L'arco è indicato con $s = R\varphi$ (raggio \cdot angolo espresso in radianti). Se applichiamo a m , vincolato a muoversi sulla circonferenza di raggio R , una forza tangenziale \vec{F}_t , si ha che:

$$F_t = m \frac{\Delta v_t}{\Delta t} = m a_t$$

dunque l'accelerazione tangenziale è diversa da zero; siccome la velocità cambia anche di direzione e verso si ha anche un'accelerazione centripeta data da:

$$a_c = \frac{v_t^2}{R}$$

allora:

$$F_t = m \frac{\Delta v_t}{\Delta t} = m \frac{\Delta(R\omega)}{\Delta t} = mR \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

moltiplicando ambo i membri per R si ottiene:

$$F_t \cdot R = mR \cdot R \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = mR^2 \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{e in definitiva}$$

$$M_O = mR^2 \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = I \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

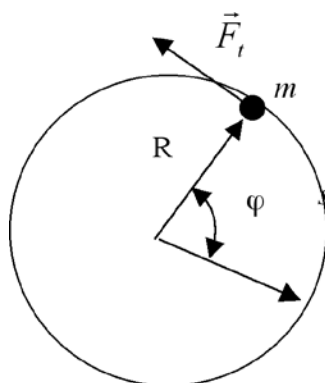
vale quindi la formula: (1) $M_O = I \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

dove il prodotto $F_t \cdot R = M_O$ è il momento delle forze F_t rispetto a O , mentre il prodotto mR^2 è il momento di inerzia I del punto materiale rispetto al punto O . Il calcolo e l'esperienza concordano nel dimostrare che una formula analoga alla (1) vale anche per un corpo rigido che ruota intorno a un asse fisso. Basta che M_O indichi la somma algebrica dei momenti delle forze esterne agenti sul sistema, rispetto all'asse, e I sia dato da:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

dove m_1, m_2, \dots, m_n sono le masse dei singoli punti, e r_1, r_2, \dots, r_n sono le loro distanze dall'asse.

Il pendolo di torsione è costituito da un filo che presenta elasticità di torsione (a seconda dei casi acciaio, quarzo, eccetera) sospeso per un estremo a un sostegno rigido; all'altro estremo è attaccato un corpo di forma tale che il filo,



nella posizione di equilibrio, ne individui un asse che passa per il baricentro. Se torciamo il filo, facendo ruotare la lastra di un angolo φ , in esso si genera una coppia di momento M_O direttamente proporzionale a φ ,

$$M_O = - C\varphi$$

dove la costante positiva C è detta costante di torsione del filo. Questa legge è verificata se φ non supera un certo limite. Se trascuriamo la resistenza dell'aria, la lastra si muove secondo:

$$M_O = I \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad -C\varphi = I \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad -C\varphi = I\alpha$$

Abbiamo trovato che l'accelerazione angolare $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ è proporzionale all'angolo φ :

$$\alpha = -\frac{C}{I}\varphi$$

Questa equazione è analoga a quella del sistema massa-molla:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{k}{m}x \quad a = -\omega_o^2 x$$

per cui :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{C}{I}}$$

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{C}{I}}$$

e quindi il periodo è dato da:

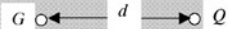
$$(2) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$$

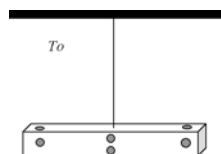
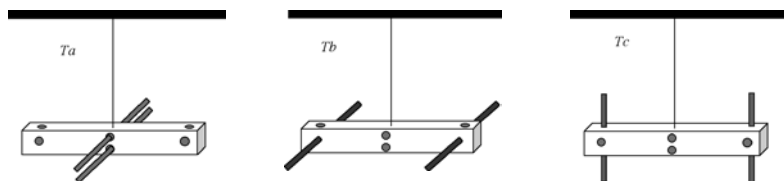
Il teorema di Huygens-Steiner applicato al pendolo di torsione

Enunciato del teorema

Sia noto il momento di inerzia I_G di un corpo C di massa m rispetto a un asse a passante per il baricentro G e sia I_Q il momento di inerzia rispetto a un asse Q parallelo all'asse a e distante d da esso, allora si ha che $I_Q = I_G + m d^2$. Per la verifica di questo teorema ci siamo serviti di un pendolo di torsione, la cui costruzione viene descritta nel riquadro a pagina 86. La formula va usata per il periodo di un pendolo di torsione, a cui vengano aggiunti dei componenti che hanno un loro momento di inerzia.

Nel pendolo da noi costruito vi sono dei fori nei quali abbiamo infilato, simmetricamente, due sbarrette di ferro in tre posizioni diverse (mostrate nelle figure della pagina successiva): orizzontali, e passanti per l'asse di oscillazione; orizzontali, a distanza d dall'asse; verticali, sempre a distanza d .





Abbiamo poi usato il pendolo senza sbarrette (figura a lato)

Grazie alla formula (2) e al teorema di Huygens-Steiner siamo in grado di calcolare i periodi delle diverse disposizioni del pendolo di torsione da noi costruito, nel modo che segue, e di ricavare una relazione fra i diversi periodi calcolati. Per la verifica sperimentale misureremo proprio questi periodi per confrontarli con il valore teorico, e verificare la relazione che li lega.

Indichiamo con T_a , T_b , T_c e T_0 i periodi ottenuti facendo oscillare il pendolo prima con le sbarrette nelle tre posizioni e poi senza di esse. Indichiamo poi con I_0 il momento d'inerzia del pendolo senza sbarrette e con I_a , I_b , I_c quelli delle sbarrette nelle tre posizioni.

Indicando con c la costante elastica del filo avremo:

$$T_a = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_a}{c}} \quad T_b = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_b}{c}}$$

$$T_c = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_c}{c}} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{c}}$$

Per cui:

$$\bullet T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{I_0}{c} \quad \bullet T_a^2 = 4\pi^2 \left(\frac{I_0 + I_a}{c} \right)$$

$$\bullet T_b^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{I_0 + I_b}{c} \quad \bullet T_c^2 = 4\pi^2 \left(\frac{I_0 + I_c}{c} \right)$$

Dopo aver ricavato: $I_0 = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot c$ e averlo sostituito nelle precedenti equazioni otterremo:

$$\frac{T_a^2 \cdot c}{4\pi^2} = I_0 + I_a \quad \frac{T_b^2 \cdot c}{4\pi^2} = \frac{T^2 \cdot c}{4\pi^2} + I_a \quad I_a = \frac{c}{4\pi^2} \cdot (T_a^2 - T_0^2)$$

E così per tutte le altre:

$$I_b = \frac{c}{4\pi^2} \cdot (T_b^2 - T_0^2) \quad I_c = \frac{c}{4\pi^2} \cdot (T_c^2 - T_0^2)$$

Sapendo allora che, secondo il teorema di Huygens-Steiner,

$$I_b = I_a + I_c$$

sostituiamo i risultati precedenti a questa equazione:

$$\frac{c}{4\pi^2} (T_b^2 - T_o^2) = \frac{c}{4\pi^2} (T_a^2 - T_o^2) + \frac{c}{4\pi^2} (T_c^2 - T_o^2)$$

$$T_b^2 - T_o^2 = T_a^2 - T_o^2 + T_c^2 - T_o^2$$

$$T_b^2 = T_a^2 + T_c^2 - T_o^2$$

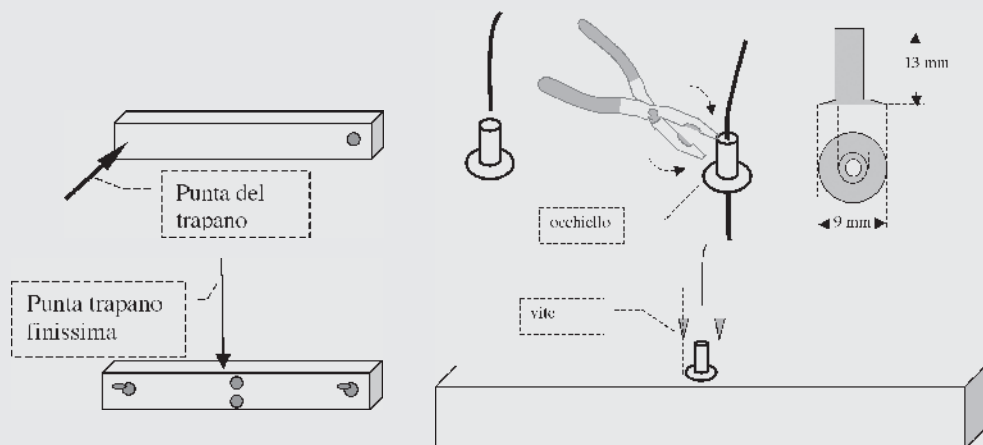
Questa è la relazione che abbiamo verificato entro i margini di errore, dopo aver misurato più volte i periodi nelle varie posizioni del pendolo utilizzato.

COSTRUZIONE DEL PENDOLO DI TORSIONE

L'equipaggio mobile del pendolo è costituito da un tubo rettangolare di alluminio di lunghezza 30 cm, larghezza 1,5 cm e altezza 3 cm; questo tubo si ottiene segandone uno da 1 m acquistato in un negozio di ferramenta; le sbarrette, che vengono infilate nei fori, sono lunghe 40 cm e hanno un diametro di 0,7 cm, ottenute segando un tondino di ferro acquistato anch'esso in un negozio di ferramenta. I fori che ospitano le sbarrette hanno diametro di 1 cm, e sono stati praticati con un trapano a colonna; i centri dei fori laterali distano 14 cm dall'asse del tubo. Al tubo di alluminio viene fissato un filo di ferro che si torce elasticamente quando il tubo si sposta orizzontalmente rispetto alla posizione di equilibrio. Il filo è lungo 35 cm e ha un diametro di 1 mm.

Per fissare il filo di ferro al tubo metallico abbiamo praticato un piccolo foro di diametro appena più grande di quello del filo: abbiamo infilato il filo di ferro in un occhiello di latta, reperibile come articolo per il cuoio, e con una pinza abbiamo schiacciato l'occhiello con dentro il filo, in modo che il filo sporgesse di 1 cm dalla base dell'occhiello. Così, filo e occhiello aderiscono tenacemente; per essere più sicuri che formino un tutt'uno si può anche colare della colla speciale per il ferro nel foro dell'occhiello.

Si fanno due fori col trapano, accanto al forellino che ospita il filo di ferro, in modo da fissare con due viti la base dell'occhiello al tubo di alluminio. Nelle figure vengono descritte le operazioni.

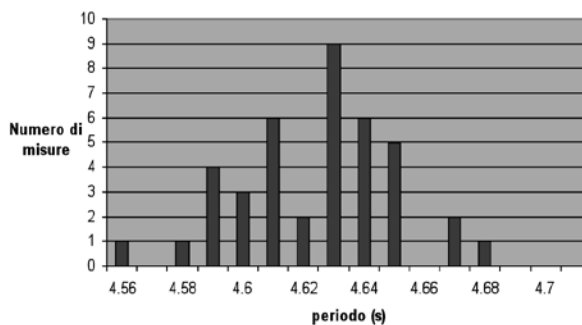


Verifica sperimentale: le misure dei periodi

Abbiamo misurato la durata di dieci oscillazioni con un cronometro digitale, con sensibilità di un centesimo. In questo modo si riduce l'errore complessivo generato da due cause diverse, entrambe legate ai nostri sensi: da una parte la difficoltà di individuare con esattezza l'istante iniziale e finale dell'oscillazione; dall'altra il tempo di ritardo tra l'istante in cui la mente comanda la pressione del bottone di start o di stop e l'istante in cui il comando viene effettivamente eseguito, che varia da persona a persona. Poiché tutte le oscillazioni hanno la stessa durata basterà dividere per 10 il tempo misurato per ottenere la durata del periodo di oscillazione: in tal modo l'errore assoluto si riduce di un fattore 10.

Misura T_a

Periodo (s)	n. di misure
4,56	1
4,57	0
4,58	1
4,59	4
4,60	3
4,61	6
4,62	2
4,63	9
4,64	6
4,65	5
4,66	0
4,67	2
4,68	1
4,69	0
4,70	0

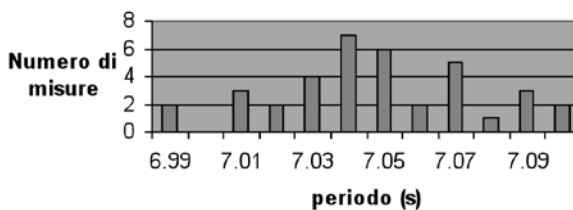


Media T_a	standard deviation
4,62 s	0,03 s

Il numero di misure che si trovano nell'intervallo $4,59 \text{ s} < T < 4,65 \text{ s}$ è circa l'80%. Come si vede l'istogramma è abbastanza simmetrico e assomiglia alla distribuzione gaussiana.

Misura T_b

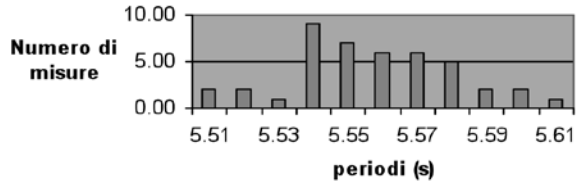
Periodo (s)	n. di misure
6.99	2
7.00	0
7.01	3
7.02	2
7.03	4
7.04	7
7.05	6
7.06	2
7.07	5
7.08	1
7.09	3
7.10	2



Media T_b	standard deviation
7,05 s	0,03 s

Misura T_c

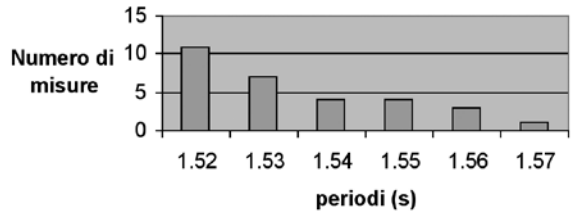
Periodo (s)	n. di misure
5.51	2.00
5.52	2.00
5.53	1.00
5.54	9.00
5.55	7.00
5.56	6.00
5.57	6.00
5.58	5.00
5.59	2.00
5.60	2.00
5.61	1.00



Media T_c	standard deviation
5,56 s	0,03 s

Misura T_o

Periodo (s)	n. di misure
1.52	11
1.53	7
1.54	4
1.55	4
1.56	3
1.57	1



Media T_o	standard deviation
1,53 s	0,02 s

In questo grafico non si ha un istogramma simmetrico, e questo è dovuto al fatto che il filo è un po' troppo rigido, per cui rimangono delle piegature che si fanno sentire di più quando il pendolo è scarico. A causa di queste piccole pieghe il momento torcente potrebbe non dipendere linearmente dall'angolo di torsione, e quindi il moto non sarebbe più armonico. Quando riproveremo a rifare questa misura utilizzeremo, per esempio, un filo da pesca. Sostituendo i valori sperimentali abbiamo verificato la relazione teorica $T_b^2 = T_a^2 + T_c^2 - T_o^2$

Si ottiene dal valore di T_b che risulta dalla relativa tabella:

$$T_b^2 = (49.7 \pm 0.5) \text{s}^2 \quad \text{dove} \quad \Delta(T_b^2) = 2T_b \Delta T_b$$

in modo analogo, dai valori di T_a, T_c, T_o

$$T_a^2 + T_c^2 - T_o^2 = (49.9 \pm 0.7) \text{s}^2 \quad \text{dove} \quad \Delta(T_a^2 + T_c^2 - T_o^2) = 2T_a \Delta T_a + 2T_c \Delta T_c + 2T_o \Delta T_o$$

I due valori coincidono, entro i limiti dell'errore sperimentale.

Quindi si può affermare che il teorema di Huygens-Steiner è ben verificato entro gli errori sperimentali. Un teorema come tale non può che essere vero, è matematica, è come il teorema di Pitagora, ma questo non vuol dire che la teoria da cui deriva si applichi alla realtà: l'aspetto fisico consiste nella verifica sperimentale che il moto del pendolo di torsione sia davvero un moto armonico, come previsto dalla teoria. Quindi se l'esperimento produce i risultati attesi vuol dire che il moto è davvero armonico, e il teorema è ben verificato nella realtà. ❖

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

E. Mach, *La meccanica nel suo sviluppo storico critico*, Bollati Boringhieri, Torino 1977

Marco Giovannozzi, *Esercizi di Fisica: guida per il laboratorio di fisica sperimentale*, editrice Universitaria, Firenze 1968.