EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

n. 50
settembre 2013

MATEMATICA AL LICEO CLASSICO UNA SCELTA DI TEMI FONDANTI SU CUI ARTICOLARE L'INSEGNAMENTO

*di Antonella Campaner**

** Docente di Matematica e Fisica al Liceo classico "A. Manzoni" di Milano*

Nel liceo classico «riformato» è previsto un incremento rilevante dei contenuti di matematica, a fronte dell'aumento di una sola ora nel quadro orario del quinquennio. Diventa quindi problematico svolgere tutti gli argomenti richiesti con una sufficiente efficacia didattica. L'autore espone un piano di lavoro in cui, nel rispetto dei punti essenziali delle indicazioni ministeriali, si operano delle scelte, a partire da temi fondanti, per costruire un percorso concettualmente coerente. È così possibile per lo studente prendere progressivamente consapevolezza dei principali concetti e strumenti della matematica, senza disperdersi in mille rivoli di un apprendimento che rischia di risultare solo di tipo funzionale e ultimamente nozionistico.

Già trascorsi quattro anni dall'introduzione della riforma nella scuola secondaria superiore, si può tentare qualche riflessione sui percorsi svolti, ricordando che, per quanto riguarda la matematica al liceo classico, all'incremento orario complessivo di un'ora (si è infatti passati da undici a dodici ore nel quinquennio) è corrisposto un incremento contenutistico sicuramente rilevante. Basti pensare, per esempio, ai capitoli riguardanti la statistica, la probabilità e l'analisi, per non parlare dei cosiddetti «elementi di informatica».

In questo quadro penso, innanzitutto, che la scelta di insegnare tutto ciò che prevedeva il «vecchio ordinamento» e, in aggiunta, i nuovi contenuti, sia una scelta poco praticabile a meno che non si decida di rimanere a un livello elementare della trattazione di tutti gli argomenti previsti, compresi gli aspetti applicativi. Mi sembra di poter dire, osservando i lavori svolti dagli studenti che si recano all'estero per alcuni periodi, che questa scelta sia attuata da altri Paesi, in contesti scolastici abbastanza diversi dal nostro.

Un'ipotesi di lavoro

La mia ipotesi di lavoro è consistita nell' individuare temi a mio avviso fondanti e di articolare intorno ad essi il lavoro di tutto il quinquennio. Ho dunque scelto di sviluppare maggiormente alcuni contenuti, di soffermarmi di più su alcuni procedimenti risolutivi per trarne suggerimenti metodologici generali e, invece, di destinare altri argomenti a momenti di «approfondimento», soprattutto culturale, affrontando in classe «solo» quegli esercizi e problemi più significativi in quanto «esempi» di modellizzazione matematica di alcune situazioni problematiche. Mi sembra opportuno puntualizzare che gli approfondimenti proposti dipendono dal tipo di classe e comunque credo siano utili perché anticipano domande e questioni che saranno ulteriormente sviluppate nel seguito; insomma si inizia a seminare qualche idea e ciò, a mio avviso, non solo «apre la strada» ad argomenti successivi, ma contribuisce anche a collegare tra loro le diverse tematiche affrontate.

In un iter di questo genere vi è la possibilità di mettere in luce la dimensione storica della matematica sottolineando alcune tra le tappe più significative dell'evoluzione del pensiero scientifico.

Una scelta di questo tipo non ha dunque come scopo primario quello di presentare un argomento ed esaurirlo trasmettendo tutte le relative informazioni e chiedendo di ripetere alcuni schemi applicativi. Al contrario, le diverse questioni riemergono in tempi e fasi diverse.

Di seguito cercherò di dare concretezza a quanto premesso innanzitutto relativamente al biennio dove, di fatto, si è avuto un incremento orario significativo (da quattro a sei ore). Penso quindi che esso debba essere sfruttato per completare la parte di geometria piana e di algebra elementare (escluso il «secondo grado») e per introdurre, anche attraverso opportuni approfondimenti, intesi nel senso sopra indicato, qualche argomento che si affronterà poi nel triennio. E così lo studente in uscita dal biennio dovrebbe aver sviluppato le proprie capacità di osservazione e di deduzione soprattutto attraverso lo studio della geometria; inoltre dovrebbe essere in grado di gestire con una certa dimestichezza il calcolo algebrico almeno nelle sue applicazioni standard e dovrebbe infine aver intuito che gli strumenti matematici sono atti a modellizzare situazioni anche molto diverse tra loro e che alcune problematiche si ripropongono nel tempo con l'esigenza di essere ampliate o affrontate anche da prospettive nuove.

Il primo biennio

Sappiamo bene che già la «semplice» introduzione al calcolo letterale, svolta a partire dalle proprietà delle operazioni con i razionali e dalle proprietà delle potenze con esponente intero, si sviluppa su più livelli che toccano questioni importanti. All'inizio mi piace parlare dei criteri di divisibilità e della loro giustificazione per mostrare le potenzialità del linguaggio matematico che, ovviamente, si ampliano con lo sviluppo dell'algebra e così, a livello di approfondimento, dopo la fattorizzazione di $x^n - 1$, *mostro come si passa dal numero periodico alla frazione generatrice.*

I numeri offrono un contesto particolarmente ricco di spunti di approfondimento. Per esempio, i reali con la proprietà della continuità, che al biennio «spuntano naturalmente», come conseguenza del teorema di Pitagora o nel corso di Scienze nel contesto di una intuitiva teoria della misura, o da qualche «curiosità» come il rapporto aureo, «si riaffacciano», in tutta la loro pregnanza, a più riprese, in tutto il triennio.

Ancora, le proprietà delle potenze, ora con esponente razionale, porgono le «regole» per il calcolo con le radici n-esime (aritmetiche): ho scelto un approccio di questo tipo al capitolo tradizionalmente intitolato ai «radicali», sfrondando così anche molti aspetti applicativi.

Infine, l'utilizzo del linguaggio algebrico per affrontare e risolvere problemi è l'ambito privilegiato in cui insistere nuovamente sulla potenzialità della matematica quale fonte di modelli, prima semplici, poi via via più evoluti e strutturati, per indagare e conoscere la realtà.

Per quanto riguarda la statistica (affrontata al primo anno) e la probabilità (affrontata nel secondo anno) metodologicamente ho scelto di lavorare a partire da esempi - senza appesantire la trattazione dell'esposizione con eccessive formule - di sfruttare il foglio elettronico, soprattutto per la prima classe, e i grafi ad albero per la seconda; per esempio, con le prove ripetute sorge il problema di dover contare il numero di casi in cui si verifica un certo evento: ecco, solo a questo punto parlo di coefficienti binomiali, naturalmente chiarendo anche il perché del loro nome.

L'algebra astratta e l'introduzione al linguaggio cartesiano sono al biennio appena accennati, ma si tenta già di mostrare come la matematica possa essere considerata disciplina che studia le strutture (si pensi alle relazioni d'ordine e di equivalenza, più volte incontrate dagli studenti in situazioni differenti) e come una stessa questione possa essere affrontata da diversi punti di vista (vedi risoluzione grafica di equazioni, disequazioni e sistemi di primo grado).

Lo studio della geometria euclidea, al quale dedico ampio spazio insistendo in particolare sugli esercizi dimostrativi e sul confronto tra i vari possibili metodi per giungere alla tesi, è indubbiamente il terreno più fertile per sviluppare le capacità logico deduttive, di osservazione e di argomentazione. A livello di approfondimento e con l'utilizzo di software geometrici affronto, al termine, le trasformazioni geometriche e i gruppi di trasformazioni.

Il secondo biennio

Al terzo anno l'attenzione è principalmente rivolta allo studio della geometria analitica, intersezione e sintesi dei due grandi filoni trattati nei primi due anni e anche linguaggio basilare per l'analisi matematica e per le scienze della natura. Si pongono così le premesse per aprire una finestra sull'analisi, a partire dal concetto di funzione fino alle problematiche legate al calcolo infinitesimale che nascono affrontando lo studio della fisica, già fin dall'inizio con la cinematica.

In secondo piano, ma non trascurata perché importante strumento di calcolo, c'è l'algebra di secondo grado; in questo momento il significato geometrico delle soluzioni di equazioni e disequazioni, già accennato precedentemente, acquista, a mio avviso, più significatività e si presta anche a generalizzazioni.

Di seguito propongo lo schema del lavoro svolto lo scorso anno. In particolare vorrei rimarcare alcuni aspetti.

- Torno sugli insiemi numerici puntando l'attenzione sulla loro struttura algebrica e sulla continuità di R. Riprendo qualche esercizio di calcolo con gli irrazionali per tentare di evitare di avere noiosi ostacoli nel seguito. All'inizio dell'anno partire affrontando questioni già viste può essere utile anche per amalgamare il nuovo gruppo classe.

- Non parlo di retta tangente a una conica se non a proposito della circonferenza, caso in cui tratto la questione solo dal punto di vista geometrico, limitandomi a un accenno al metodo algebrico, nell'ottica di «portare avanti» il parallelismo tra geometria e algebra e confrontare strategie diverse e per sensibilizzare al problema di trovare un metodo generale per determinare l'equazione della retta tangente a una data curva in un suo punto.

GEOMETRIA ANALITICA	*ALGEBRA*
1. Ripasso Corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali: piano cartesiano. Distanza tra due punti e coordinate del punto medio di un segmento. *Equazione della retta.* *Rette parallele e perpendicolari.* *Intersezione tra rette.*	***1. Ripasso*** Ripresa di **N**, **Z**, **Q**, **R**: loro struttura algebrica. Continuità di **R** e sua immagine geometrica. Calcolo con gli irrazionali del tipo $\sqrt[n]{a},\ a \in \mathbf{R},\ a \geq 0$
2. Complementi sulla retta *Distanza di un punto da una retta.* Problemi riepilogativi.	***2. Equazioni di secondo grado*** Equazioni di secondo grado e loro risoluzione. Somma e prodotto delle radici di una equazione di secondo grado, scomposizione del trinomio di secondo grado. La funzione di secondo grado.
3. Circonferenza *Equazione di un luogo geometrico. Esempi: asse di un segmento, bisettrice di un angolo, circonferenza.* *Equazione della circonferenza: applicazioni.* *Posizioni reciproche tra retta e circonferenza: retta tangente a una circonferenza in un suo punto e rette tangenti a una circonferenza da un punto esterno.* *Problemi sulla circonferenza.*	***3. Disequazioni*** Disequazioni e principi di equivalenza. Disequazioni frazionarie. Sistemi di disequazioni.
4. Parabola *Definizione, costruzione geometrica, equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate.* *Primi esercizi sulla parabola.*	***4. Equazioni di grado superiore al secondo*** Equazioni binomie e trinomie. Equazioni che si risolvono con il teorema e la regola di Ruffini.
5. Ellisse e iperbole *Definizione, costruzione geometrica, equazione canonica.* *Le coniche.*	***5. Equazioni irrazionali*** Equazioni irrazionali con un solo radicale quadratico.

- Ellisse e iperbole sono poste a completamento del tema riguardante le sezioni coniche, senza particolari sviluppi applicativi.

- Cerco di procedere parallelamente sia con l'algebra che con la geometria analitica, sempre per i motivi detti all'inizio.

Il lavoro del quarto anno verte principalmente sullo studio delle funzioni elementari e delle loro proprietà. L'obiettivo non è soltanto quello di approfondire il concetto di funzione ma, mettendo in evidenza le proprietà peculiari delle funzioni elementari, cerco di mostrare come esse siano atte a descrivere e modellizzare alcune situazioni reali, a tradurre in termini matematici le leggi che regolano i fenomeni naturali. Ciò consente anche di introdurre, in modo del tutto naturale, alcuni concetti del calcolo infinitesimale, almeno a un primo livello intuitivo.

Di seguito propongo lo schema del lavoro che ho preventivato per l'anno scolastico iniziato.

FUNZIONI ELEMENTARI E QUASI ELEMENTARI	***APPLICAZIONI***
1. *Ripresa della definizione di funzione reale di variabile reale* Generalità sulle funzioni. Grafici di particolari funzioni irrazionali a partire dalle coniche studiate. Risoluzione grafica di equazioni e disequazioni irrazionali	***1. Ripasso dell'algebra*** Disequazioni, sistemi di disequazioni e disequazioni frazionarie. Equazioni irrazionali con un solo radicale quadratico.
2. Le funzioni potenza e il problema della ricerca della retta tangente a una funzione in un suo punto. Le funzioni potenza con esponente naturale e intero negativo. Calcolo del coefficiente angolare della retta tangente (per le funzioni potenza) come caso limite del calcolo del coefficiente angolare della retta secante. Definizione intuitiva di limite e derivata. Legami con la fisica. Grafico delle funzioni polinomiali.	***2. Complementi di geometria analitica*** Retta tangente a $y = ax^2 + bx + c$ in un suo punto. *Funzione omografica.*
3. Funzioni esponenziali e logaritmiche *Completamento della nozione di potenza: funzioni esponenziali.* *Il numero di Nepero.* *Definizione di logaritmo e proprietà dei logaritmi. Funzioni logaritmiche.* *Approfondimento*: la funzione e^x, la sua derivata, la crescita esponenziale e il modello di Malthus. *Approfondimento*: dal problema delle prove ripetute alla distribuzione binomiale. Cenni alla distribuzione di Poisson e alla distribuzione normale.	***3. Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche*** *Semplici equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche.*
4. Funzioni trigonometriche: seno, coseno e tangente. Elementi di trigonometria. *Funzioni trigonometriche: le definizioni di seno, coseno e tangente: periodicità, grafici e proprietà.* *Relazione fondamentale della trigonometria. Angoli notevoli. Angoli associati e complementari.* *Cenni alle formule trigonometriche.* *Teoremi relativi ai triangoli rettangoli. Teorema della corda, del coseno, dei seni. Semplici applicazioni.* *Approfondimento: lato del poligono regolare inscritto di n lati e conseguenze: lunghezza della circonferenza, area del cerchio, π, approssimazione di $\operatorname{sen}x$ con x quando x tende a zero.* *Approfondimento: derivata di seno e coseno, equazione caratteristica del moto armonico.*	***4. Equazioni e disequazioni trigonometriche*** *Equazioni e disequazioni elementari e ad esse riconducibili.*

L'anno conclusivo

Non sarà sfuggito l'intento di anticipare l'introduzione dei concetti basilari dell'analisi matematica che affiora in tutta la mia programmazione. In effetti la mia preoccupazione riguardo a questo capitolo del programma dell'ultimo anno è duplice: non vorrei rischiare di sminuirne la portata concettuale, altrimenti mi sembrerebbero vanificate gran parte delle motivazioni che hanno condotto all'introduzione di questo ramo della matematica anche nel curriculum del Liceo Classico, né tantomeno vorrei ridurlo a una appendice di algebra (mi sembra che, in alcuni casi, l'accento su alcuni schemi e alcune tecniche tendano appunto a ridurre il tutto a puro calcolo). Penso dunque che all'ultimo anno l'orizzonte concettuale e la portata metodologica siano da tenere in primo piano rispetto agli aspetti applicativi: del resto le due ore settimanali di lezione impongono necessariamente una scelta.

Per esempio il concetto di limite e quello di continuità, e i relativi risultati, ora vanno focalizzati con rigore, senza per questo appesantire la trattazione con «troppe» dimostrazioni; a livello applicativo punterei essenzialmente sulla «traduzione grafica» del concetto di limite e, viceversa, sulla «lettura» dei limiti a partire da un grafico e sulla «gerarchia» degli infiniti e degli infinitesimi.

Allo stesso modo, dati per acquisiti la definizione di derivata con il suo significato geometrico e le derivate delle funzioni elementari, metterei in primo piano i legami tra continuità e derivabilità e i teoremi sulle funzioni derivabili e poi le regole di derivazione; a livello applicativo punterei essenzialmente su grafici di funzioni «abbastanza semplici» in cui intervengano ancora le proprietà delle funzioni elementari studiate; dedicherei a momenti di approfondimento qualche problema di ottimizzazione legato a questioni di geometria solida (come, per esempio il problema della «lattina»).

A questo punto, i problemi del calcolo dello spazio percorso in un moto vario, del lavoro compiuto da una forza non costante, della probabilità che una certa variabile casuale stia tra valori dati sono ancora problemi aperti: la definizione di integrale (definito) mostra l'oggetto che li unifica ma, ovviamente, resta aperto il problema del calcolo. Qui penso che, oltre alla doverosa citazione del teorema di Torricelli, non resti spazio che per qualche esempio di semplice applicazione che, ancora una volta, mostri che le risposte già date, per esempio alle questioni di fisica sopra citate, coincidono con quelle fornite dal «nuovo» strumento matematico introdotto e dal teorema fondamentale del calcolo integrale .

Antonella Campaner

(Docente di Matematica e Fisica al Liceo classico "A. Manzoni" di Milano)

EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
www.emmeciquadro.eu

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389
Emmeciquadro (online)