EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica
n. 62
settembre 2016

DAL PIANO INCLINATO DI GALILEO ALL'EQUAZIONE DEL PENDOLO «ALLA FEYNMAN»

*di Costantino Sigismondi **

* ICRA - *International Center for Relativistic Astrophysics, Università degli studi di Roma "La Sapienza" e Istituto di Istruzione Statale* – I.I.S. – *"Federico Caffè" di Roma*

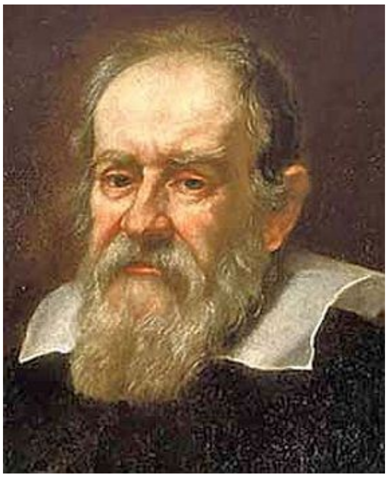
Per affrontare a scuola due argomenti iniziali del corso di Fisica, l'autore sviluppa un'interessante proposta didattica, che tiene anche presente la dimensione storica.
La derivazione galileiana della legge del moto uniformemente accelerato per mezzo dell'esperimento del piano inclinato, e la dimostrazione, attraverso lo studio teorico del moto del pendolo, che tutti i corpi subiscono la stessa accelerazione gravitazionale, sono i contenuti proposti.
Su questi si articolano una serie di esercitazioni di laboratorio e di test, quesiti e problemi, che hanno lo scopo sia di far fare agli studenti una esperienza diretta del metodo sperimentale, sia di far loro acquisire una maggior consapevolezza della teoria.
Un percorso didattico che l'autore ha realizzato con studenti del primo anno del liceo scientifico e dell'I.T.I.S.

Il piano inclinato e il pendolo sono due argomenti tradizionali con cui si iniziano i corsi di Fisica e di Meccanica.
Queste considerazioni cercano di mettere in evidenza come col piano inclinato Galileo abbia mostrato la legge del moto uniformemente accelerato, fino al caso limite della caduta libera in verticale, e come l'equazione del moto del pendolo possa essere derivata senza ulteriori assunzioni come conseguenza delle leggi del piano inclinato. Il pendolo in posizione elongata rispetto al riposo in verticale è sottoposto alla stessa accelerazione che avrebbe se posto sul piano inclinato tangente in quella stessa posizione.
Gli esperimenti di Galileo vengono affiancati alla matematica di Eulero e alla fisica di Feynman in una efficace sequenza didattica, proposta a studenti dei primi anni del liceo scientifico e dell'I.T.S., ma adatta anche ai palati più raffinati dei maturandi.

Il piano inclinato di Galileo

Un piano inclinato di cinque metri di lunghezza con dei campanellini posti a distanze opportune ha permesso a Galileo di provare la legge del moto uniformemente accelerato: interrompendo un flusso d'acqua «pesava» il tempo nel bicchiere![1]
Materiale: un banco, una matita, una pallina, tre libri.
Procedimento: si inclina il banco ponendo sotto un lato i tre libri. La matita è l'unità di misura; si segnano i punti distanti 1, 4, 9 e 16 matite dal bordo rialzato: sono i quadrati di 1, 2, 3, 4.
Misure: la pallina rotola impiegando tempi uguali da un segno all'altro. Si eseguono le misure in diversi modi: a orecchio, battendo sul banco la matita a ogni passaggio; con un cronometro; con un video contando i fotogrammi tra un passaggio e il successivo. Galileo fece suonare le campanelle e usò il pendolo.
Conseguenze: lo spazio percorso è direttamente proporzionale al quadrato del tempo, il grafico spazio (y) in funzione del tempo (x) è una parabola. Galileo capì che l'accelerazione «*g*» è la stessa per tutti i corpi.

La progressione aritmetica dei numeri dispari e a=costante
Galileo non diceva di aver posto i segnali sui punti corrispondenti ai quadrati di 1, 2, 3, 4, cioè 1, 4, 9 e 16 ... bensì di collocare i *riferimenti spaziati secondo i numeri dispari*, cioè 1, 3, 5, 7, 9 ... ogni spazio cresce uniformemente di due unità (progressione aritmetica).
Si può verificare con un po' di addizioni che 1+3=4, 1+3+5=9, 1+3+5+7=16 ... e così via. Galileo era professore di Matematica!
In questo modo prese «due piccioni con una fava»: disegnò spazi uniformemente crescenti (aumentano di 2 unità ogni volta), che attraversati in tempi uguali, dimostravano un'accelerazione «*a*» uniforme! E dimostrò anche la legge dei quadrati: lo spazio «*s*» cresce proporzionalmente al quadrato del tempo: $s = kat^2$, con k = costante.
L'accelerazione è il rapporto tra variazione di velocità e tempo, $a=\Delta v/\Delta t$, la velocità dipende dal rapporto tra spazio Δs percorso e tempo, $v = \Delta s/\Delta t$; se i Δs crescono come 1, 3, 5, 7 ... e i Δt sono costanti, anche le velocità crescono come 1, 3, 5, 7... ma le variazioni Δv di v, restano costanti Δv=(3-1)=(5-3)=(7-5) ... perciò essendo il ritmo dei passaggi Δt costante, l'accelerazione è costante!
Galileo estese il risultato anche alla caduta libera, considerandola il caso limite del piano inclinato con inclinazione verticale.
Aveva così dimostrato che tutti i corpi cadono di moto uniformemente accelerato, superando la visione di Aristotele (384-322 a. C.) secondo cui i corpi cadevano a velocità uniforme, proporzionale alla massa: un corpo più pesante doveva cadere a terra più velocemente.
Il famoso esperimento della piuma che cade veloce come la pietra nel vuoto era stato immaginato già da Galileo, che aveva capito che le velocità di caduta uniformi dipendevano dall'attrito dell'aria.
Il vantaggio offerto da una palla che rotola è quello di ridurre a un solo punto l'attrito con il piano.


Galileo Galilei (1564-1642)

Un'accelerazione «*g*» uguale per tutti i corpi: il pendolo

Se lasciamo rotolare una palla più grossa questa viaggerà più lentamente di una piccola a causa della sua maggiore inerzia al movimento di rotolamento.
La parola inerzia è sinonimo di indolenza, quasi un rifiuto di fare qualcosa, lentezza a rispondere ... molti studenti ne sanno qualcosa! In Fisica rappresenta proprio l'opposizione al moto dei corpi, e cambia se la massa è concentrata in un punto «materiale» oppure in un solido esteso.
Nella realtà tutti i corpi sono estesi (più o meno) e non esistono veri e propri punti materiali, che sono il caso limite per corpi piccoli, ma di massa uniforme.
Se un corpo si muove senza rotolare è come se la sua massa fosse concentrata in un punto, il suo baricentro. È questo il caso del pendolo semplice (palla e filo appeso ad un punto).
Galileo aveva osservato i lampadari della Cattedrale di Pisa quando oscillavano lentamente, e poi si era accorto che il periodo di oscillazione del pendolo dipendeva solo dalla lunghezza del filo e non dalla massa appesa! Aveva dimostrato che l'accelerazione «*g*» di gravità era la stessa per tutti i corpi, senza il problema dell'inerzia dei corpi solidi risolto solo nel 1687 da Isaac Newton (1642-1727) nei suoi *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*[2].
Ricapitolando: le masse appese al pendolo non rotolano, e si comportano come punti materiali, questo permette di vedere che l'accelerazione di gravità, che determina il moto e il periodo del pendolo, non dipende dalla massa appesa.
Di seguito sono riportate esempi di attività didattiche.

Esercitazioni sperimentali

- ◊ Con dei lacci da scarpa costruire dei pendoli appendendo dei pesi (per esempio una mela) e verificare che a parità di lunghezza filo-centro della mela il periodo è lo stesso.
- ◊ Misurare l'allungamento percentuale $\Delta l/l_0$ di un laccio, che a riposo è lungo l_0 e *sotto tiro* si allunga di $\Delta l=l-l_0$: legge di Hooke.

Questionari e problemi
Ora seguono questionari e semplici problemi pensati per vedere come ragionano gli studenti dopo la spiegazione del piano inclinato.

Ci sono delle reminiscenze di altri argomenti come la legge di Keplero, l'esperimento di Guglielmini a Bologna, che possono aver sentito anche da altri docenti, tuttavia l'obbiettivo è quello di notare come alcuni automatismi del ragionamento non cambino nonostante le spiegazioni razionali convincenti: si può anche andare bene all'interrogazione e rispondere esattamente a tutto e restare intimamente convinti che una casa cadendo deve andare più velocemente di una singola pietra ... senza neanche sospettare che è proprio questo che si è dimostrato fino ad adesso.
Altre domande vogliono aiutare a memorizzare alcuni *puntelli* storici, come le date, che non vanno più di moda come in un piatto «libro di facce» generalizzato.
Non ci si dovrebbe stupire se il «senso comune» resista anche al ragionamento più sottile: da una parte questo dovrebbe farci riflettere sulla profondità della fisica aristotelica, largamente valida in presenza di attrito (facilmente una casa cadrà più velocemente di una pietra ... se viene fatta cadere da 3000 metri di quota) e sul fatto che la fisica galileiana si sia affermata solo venti secoli dopo Aristotele!

La legge del moto rettilineo uniforme si esprime con la frase
a) il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali
b) un punto materiale percorre spazi uguali in tempi uguali
c) un punto materiale percorre spazi uniformemente crescenti in tempi uguali
d) un punto materiale percorre spazi direttamente proporzionali ai numeri dispari

La legge del moto rettilineo uniforme descrive bene
a) la caduta di una goccia di pioggia in aria
b) la caduta di una palla di ferro dalla Torre degli Asinelli
c) il rotolamento di una palla su pavimento orizzontale liscio
d) il rotolamento di una pallina su un piano inclinato

La legge del moto uniformemente accelerato si esprime
a) un punto materiale si sposta con velocità uniforme crescente
b) un punto materiale copre spazi uniformi crescenti in tempi uguali
c) un punto materiale è animato di accelerazione costante
d) lo spazio percorso dal p. m. cresce col quadrato del tempo

La legge del moto circolare uniforme si esprime
a) il raggio vettore circolare spazza aree uguali in tempi uguali
b) il punto materiale su un cerchio descrive angoli uguali in tempi uguali
c) un corpo si muove su un cerchio con velocità costante
d) un corpo percorre archi di cerchio uguali in tempi uguali

La seconda legge di Keplero si esprime
a) il raggio vettore spazza angoli uguali in tempi uguali
b) il raggio vettore su ellissi spazza aree uguali in tempi uguali
c) la velocità aerale di un pianeta su orbita ellittica è costante
d) il raggio vettore si allunga e si accorcia lungo un'ellissi

La sequenza dei primi quadrati dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5
a) si ottiene sommando tutti i numeri dispari fino a 5
b) si ottiene sommando i primi cinque numeri dispari
c) si ottiene sommando i primi 1, 2, 3, 4 e 5 numeri dispari
d) si ottiene sommando i primi cinque numeri primi

Galileo Galilei visse nel
a) XV secolo
b) XVI-XVII secolo
c) XVIII secolo
d) XVIII-XIX secolo

Problemi
◊ Scrivere una tabella con Spazio e Tempo e dati di un moto rettilineo uniforme inventato.
◊ Disegnare un grafico di Spazio (asse y) e Tempo (asse x) di un moto rettilineo uniforme.

- ◊ Scrivere una tabella con Spazio e Tempo e dati di un moto rettilineo uniformemente accelerato inventato.
- ◊ Disegnare un grafico di Spazio (asse y) e Tempo (asse x) di un moto rettilineo uniformemente accelerato.
- ◊ Calcolare dall'equazione $s=1/2\ g\ t^2$ con $g=9.8$ m/s^2 quanti metri percorre un sasso in caduta libera dopo 1, 2, 3, 4 e 5 secondi, e valutare quanti piani (alti 3 metri l'uno) ha percorso.
- ◊ Calcolare dalla formula $T = 6.28\sqrt{\frac{L}{g}}$

  (con L=lunghezza del filo e g accelerazione di gravità) il periodo di un pendolo semplice con il filo lungo L=1m, ed L=2m.

- ◊ Fare un grafico di due grandezze in proporzionalità diretta.
- ◊ Fare un grafico di due grandezze in proporzionalità inversa.
- ◊ Fare un grafico di due grandezze A e B, una (A) direttamente proporzionale al quadrato dell'altra (B).
- ◊ Se due grandezze A e B sono tali da essere una (A) direttamente proporzionale all'inverso del quadrato dell'altra (B), il prodotto AB^2 è costante, mentre se sono inversamente proporzionali AB=costante. Verificarlo per le grandezze nelle tre tabelle:

A	B	A	B	A	B
1	1	1	2	1	1
2	0.5	2	1	2	0.25
3	0.333	3	0.666	3	0.111
4	0.25	4	0.50	4	0.0625
5	0.20	5	0.40	5	0.04

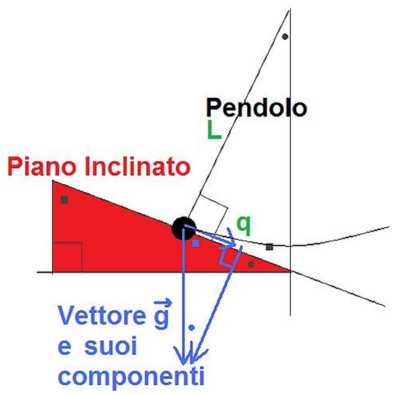
- ◊ Un treno percorre spazi che aumentano di un metro ogni volta, sempre in un secondo. Qual è la sua accelerazione?

Le piccole oscillazioni del pendolo e la scomposizione di «*g*»

Il periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo dipende solo dalla lunghezza L del filo, la legge matematica è $T = 6.28\sqrt{\frac{L}{g}}$: è la conseguenza dell'accelerazione di gravità uguale per tutti i corpi.

Per dimostrarlo scomponiamo il vettore $\vec{g}$ diretto «aristotelicamente» verso il centro della Terra nel suo componente parallelo al piano inclinato $\vec{p}_{\parallel}$ e in quello perpendicolare $\vec{p}_{\perp}$. La presenza del piano offre la reazione vincolare, che si oppone a $\vec{p}_{\perp}$, mentre lascia agire solo $\vec{p}_{\parallel}$.

Questo fa sì che tecnicamente un piano inclinato sia una macchina vantaggiosa.
Per i triangoli simili si può dimostrare senza difficoltà che $g_{//}=gh/q$, dove h è l'altezza del piano inclinato rispetto all'orizzontale e q la sua lunghezza misurata proprio sull'orizzontale.
Adesso torniamo al pendolo, e spostiamolo dalla sua posizione verticale di equilibrio di una quantità piccola q.
Possiamo immaginare il piombo del pendolo, in questa nuova posizione, come giacente su un piano inclinato esattamente come la perpendicolare al filo del piombo in quel momento.



Il piombo, essendo attaccato al filo inestensibile, non può che muoversi lungo l'arco di cerchio, e perciò perpendicolarmente al filo stesso. Il piombo percorre circa $\Delta s=4q$ per ritornare al punto di partenza e compiere un'oscillazione completa. Il periodo T lo otteniamo dividendo lo spazio $4q$ per la velocità media del primo tratto lungo q.
Usiamo qui il metodo di Leonardo Eulero (1707-1783) e ripreso dal premio Nobel Richard P. Feynman (1918-1988) per le orbite dei pianeti[3]: Eulero approssimava la velocità media in un moto uniformemente accelerato con quella raggiunta a metà dell'intervallo temporale Δt scelto, $<v>\approx g_{//}\cdot\Delta t/2=gqT/8L$. Il periodo $\Delta t=T=\Delta s/<v>$. Esplicitando l'equazione nei suoi termini, è quadratica in T, così $T^2=4q\cdot 8L/gq=32L/g$,

da cui $T \approx 5.7\sqrt{\frac{L}{g}}$, approssimazione del 10% inferiore alla legge esatta. Si è così dimostrato che T dipende da $\sqrt{L}$.

Galileo dimostrò che il periodo del pendolo dipende dalla lunghezza del filo; che il periodo non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni; che il periodo non dipende dalla massa del corpo.

Riassumendo: l'importanza del piano inclinato e del pendolo

Galileo con il piano inclinato ha mostrato che la caduta libera è un moto uniformemente accelerato, cioè che a ogni intervallo di tempo il corpo aumenta la sua velocità di uno stesso valore.
Con il pendolo si verifica che l'accelerazione è la stessa per tutti i corpi, essendo il periodo dipendente solo dalla lunghezza del filo (visto con un astuccio e varie masse dentro).
Il pendolo nella sua posizione iniziale è come posato su un piano inclinato che sparisce quando la massa inizia a oscillare, ma senza rotolare: solo così l'accelerazione è veramente la stessa per tutti i corpi.
Il piano inclinato consente di studiare la scomposizione del vettore accelerazione di gravità nella componente parallela e in quella perpendicolare al piano a cui reagisce la forza vincolare.
Il pendolo è uno strumento di misura accurato, Galileo ha scoperto l'isocronismo delle piccole oscillazioni, gli orologiai del XVII-XIX secolo lo hanno perfezionato e usato per tutte le misure astronomiche, fino all'orologio atomico.

Costantino Sigismondi

(ICRA - *International Center for Relativistic Astrophysics-Università degli studi di Roma "La Sapienza" e Istituto di Istruzione Statale* – I.I.S. – *"Federico Caffè" di Roma*)

Note

1. *http://www.beic.it/project_galileogalilei/claudia_borghini_galileo_piano_inclinato.php*
2. *http://www.treccani.it/enciclopedia/l-eta-dei-lumi-astronomia-l-astronomia-del-sistema-solare-da-newton-a-laplace_%28Storia-della-Scienza%29/*
3. Fisica, Book in Progress 1° anno - cap. 4 (ITIS Majorana Brindisi, 2014), da lezione di R. P. Feynman sull'orbita dei pianeti col metodo di Eulero.

EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
www.emmeciquadro.eu

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389
Emmeciquadro (online)