

## LE ONDE GRAVITAZIONALI

di Luigi Secco\*

*Partendo da un'analogia tra il campo elettromagnetico e quello gravitazionale, l'autore mostra come dalle equazioni di Einstein della relatività generale derivi la previsione delle onde gravitazionali. Quindi descrive l'esperimento, basato su un interferometro gravitazionale di Michelson, che ha rivelato l'esistenza delle onde, commentando i risultati.*

*Una trattazione molto interessante, condotta con rigoroso formalismo matematico, che potrà risultare impegnativo per molti lettori, ma necessario per non ridurre la portata della teoria einsteiniana.*

*La consultazione di un precedente articolo, [L'eredità scientifica di Einstein](#), EmmeCiquadro n.61 – Giugno 2016, dello stesso autore, può agevolare una piena comprensione di questa importante conquista teorica e oggi anche sperimentale.*

\* Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Padova

Non c'è stato modo migliore di celebrare il centenario della Relatività Generale, che confermare l'esistenza delle onde gravitazionali! La loro osservazione diretta risale al 14 settembre 2015, mentre l'annuncio ufficiale è stato dato solo l'11 febbraio scorso. L'attesa della loro scoperta è stata lunga. D'altra parte, le equazioni del campo gravitazionale, trovate da Einstein nel novembre 1915, non lasciavano dubbi.

### Presupposti

L'introduzione della gravità nell'elemento infinitesimo della metrica spazio-temporale, era stata un'idea degna della genialità di Albert Einstein (1879-1955). Con riferimento all'articolo precedente ([L'eredità scientifica di Einstein](#), EmmeCiquadro n.61 – Giugno 2016), ricordiamo che il potenziale gravitazionale  $\varphi$  era stato inserito sia nella parte temporale che in quella spaziale dell'elemento infinitesimo dello spazio-tempo.

Come sottolineato da Einstein, bastava quindi cambiare il sistema delle coordinate di riferimento per poter ottenere l'inserimento della gravità [Einstein, 1916, pg.511].

Le conseguenze, già considerate, sono davvero notevoli:

- 1) La presenza di una massa modifica la metrica dello spazio-tempo;
- 2) anche un fotone, in un campo curvato dalla gravitazione, flette la sua traiettoria;
- 3) un qualunque corpo dotato di massa può quindi causare effetti di lente gravitazionale.

Rimane poi l'ultima, oggetto specifico del presente articolo:

- 4) movimenti di masse causano increspature nello spazio-tempo che si possono propagare sotto forma di onde gravitazionali (Figura 1).

La costruzione originale dell'elemento spazio-temporale, non era tuttavia

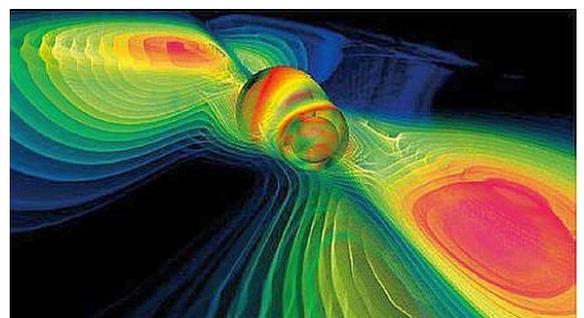
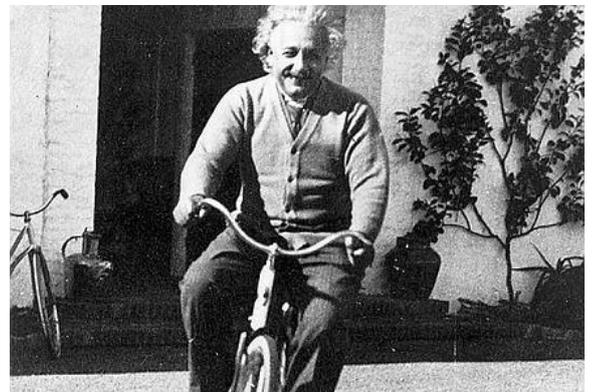


Figura 1— I movimenti di masse, nel loro reciproco avvicinamento, causano vibrazioni dello spazio-tempo in grado di propagarsi come onde gravitazionali.

sufficiente, come abbiamo visto: occorre trovare la relazione esatta fra le sorgenti del campo gravitazionale e le deformazioni della metrica procurate dalla loro presenza.

Queste sarebbero state le equazioni del campo gravitazionale: in linea di principio, bastava costruire l'analogo di ciò che James C. Maxwell (1831-1879) aveva già fatto per il campo elettromagnetico (E-H).

In tale deduzione analogica, appare immediata la presenza delle onde gravitazionali, come conseguenza delle equazioni di campo, alla stregua di quelle elettromagnetiche, conseguenza delle equazioni di Maxwell.

### Il campo gravitazionale e quello elettromagnetico

#### Deduzione delle equazioni gravitazionali per analogia con quelle di Maxwell

L'intensità del campo elettrico  $\vec{E}$ , e magnetico  $\vec{H}$  sono date, rispettivamente, mediante il potenziale elettrico scalare  $\varphi$  ed il potenziale vettore  $\vec{A}$ , nel modo seguente:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi; \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}$$

Nello spazio di Minkowski, dove tre coordinate sono spaziali e reali  $\vec{x} \equiv (x,y,z)$  mentre la quarta è temporale e immaginaria,  $ict$  ( $i$ =unità immaginaria,  $c$ =velocità della luce), ogni punto quadridimensionale è dato da:

$$x_\mu \equiv (\vec{x}, ict) \text{ essendo } (\mu = 1,2,3,4).$$

In questo spazio si costruisce un vettore potenziale a quattro componenti, di cui tre sono reali  $\vec{A} \equiv (A_x, A_y, A_z)$  e la quarta è immaginaria  $i\varphi$ . In modo sintetico scriveremo questo tetrapotenziale come:

$$A_\mu \equiv (\vec{A}, i\varphi)$$

ed esprimeremo con esso<sup>1</sup> le equazioni di Maxwell, nel modo seguente:

$$\square A_\mu = -\frac{4\pi}{c} j_\mu$$

dove viene definito un nuovo tetra-vettore,  $j_\mu \equiv (\vec{j}, i c \rho)$ , fatto con,  $\rho$  = densità elettrica spaziale e  $\vec{j}$  densità superficiale di corrente sulla sezione  $S^2$ .

Il significato fisico profondo delle equazioni di Maxwell nei potenziali, è quello di legare la descrizione del campo (E-H), mediante  $A_\mu$ , in grado di descrivere completamente il campo (E-H) sia nella parte elettrica che magnetica, alle sue sorgenti, cioè le cariche e le correnti:  $\rho$ , e  $\vec{j}$ .

L'analogo deve avvenire per il campo gravitazionale.

Quest'ultimo deve essere descritto dall'analogo del tetrapotenziale,  $A_\mu$ , costruito con il potenziale gravitazionale,  $\phi$ , e comparire a primo membro. Sapendo che,  $\phi$ , è già dentro all'elemento della metrica spazio-temporale,  $g_{\mu\nu}$ , ( $\mu, \nu = 1,2,3,4$ ) che è un tensore<sup>3</sup> (il tensore metrico), ci si aspetta che ad  $A_\mu$  corrisponda un  $\square g_{\mu\nu}$ .

A secondo membro devono esserci le sorgenti della gravità, l'analogo di  $j_\mu$ , dentro un tensore energia-impulso,  $T_{\mu\nu}$ , contenente tutti i contributi alla massa da parte della materia, sia diretti, come la densità, sia trasformabili mediante:  $E = mc^2$ , vale a dire tutte le forme di energia della materia, interna (per esempio la pressione) o di movimento (energia cinetica).

Pertanto la sequenza analogica per transitare dalle equazioni di Maxwell a quelle di Einstein sarà:

$$\nabla A_\mu \rightarrow \square g_{\mu\nu} \rightarrow (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \sim T_{\mu\nu} \rightarrow j_\mu$$

È interessante notare che, in approssimazione di campo gravitazionale debole e stazionario

( $\square \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2$ ), nel limite dello spazio piatto di Minkowski e nel sistema di riferimento solidale con il campo in movimento, le equazioni di Einstein si riducono all'equazione familiare di Poisson:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$$

che lega appunto il campo  $\phi$  alla sua sorgente, la densità di materia  $\rho$ .

*Previsione delle onde gravitazionali dall'analogia con quelle di Maxwell*

Non appena l'analogia, appena descritta, diviene lecita, immediatamente è evidente l'esistenza delle onde gravitazionali. Infatti, come nel campo (E-H) la natura stessa delle equazioni implica la propagazione delle onde elettromagnetiche (basti pensare che, lontano dalle sorgenti, quindi  $j_\mu = 0$ , le equazioni di Maxwell diventano proprio le equazioni di propagazione di d'Alembert) altrettanto, le equazioni così dedotte per il campo gravitazionale, analoghe a quelle di Maxwell, implicano la propagazione delle onde gravitazionali.

C'è, tuttavia, una differenza enorme fra la forza elettromagnetica e quella gravitazionale. La possiamo capire, confrontando l'intensità di queste due forze (in variabili adimensionali).

Vi è un fattore di diminuzione di circa  $10^{-37}$  fra le due, a sfavore della forza gravitazionale. Questo spiega, immediatamente il motivo della difficoltà di rilevazione delle onde gravitazionali rispetto a quella delle onde elettromagnetiche.

*Limiti dell'analogia*

L'analogia considerata fra il campo elettromagnetico e quello gravitazionale rimane molto proficua per la comprensione del senso delle equazioni di Einstein, tuttavia essa possiede dei limiti legati alla diversa natura dei due campi.

Sostanzialmente, mentre le equazioni di Maxwell sono lineari, quelle originali di Einstein non lo sono<sup>5</sup>. Inoltre le prime sono vettoriali, le seconde sono invece tensoriali.

L'analogia fra i due tipi di equazioni, diventa significativa soltanto quando le equazioni di campo gravitazionale si possono linearizzare, vale a dire nel vuoto o con la presenza di materia, ma solo sotto particolari condizioni.

Riassumendo le proprietà delle onde gravitazionali linearizzate, sono [Hartle, Cap.16, pag.332] le seguenti: si propagano con la velocità della luce; sono trasversali; hanno due stati indipendenti di polarizzazione<sup>4</sup>; possono essere evidenziate dal moto relativo di masse *test* mediante interferometro.

In realtà la trattazione teorica è più complessa di quella basata sull'analogia (si veda l'[Approfondimento](#)) ed è consigliata a chi ha già una conoscenza specifica dell'argomento.

**Rivelazione dell'evento e sua interpretazione**

*L'apparato osservativo*

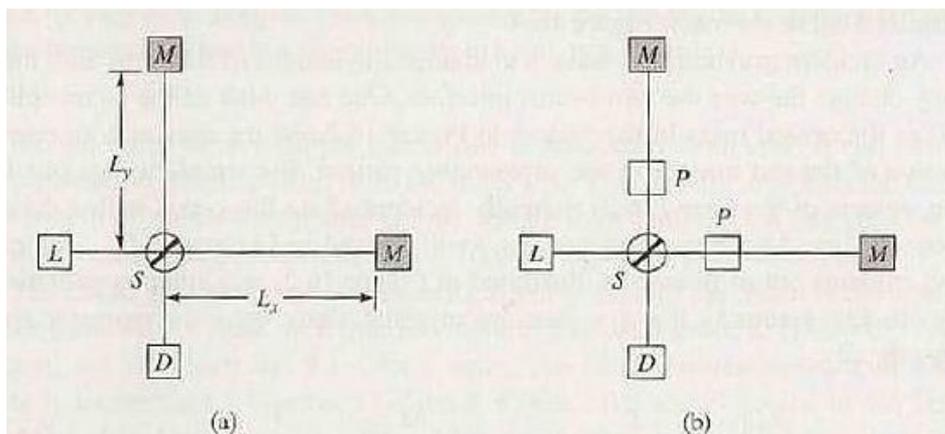


Figura 2: Schema dell'interferometro gravitazionale di Michelson.

In riferimento alla Figura 2, le masse test, sospese verticalmente, sono: una in S, dove è alloggiato il *beam splitter* che divide in due parti il fascio laser proveniente da L, due in M, dove sono alloggiati i due specchi alla fine dei due bracci  $L_x, L_y$  (a).

Piccole differenze nella lunghezza dei due bracci, sono evidenziate dalla figura d'interferenza sul *detector* D. L'aggiunta dei due specchi P in (b), hanno l'effetto di aumentare la lunghezza dei bracci e quindi la sensibilità dell'interferometro [Hartle, 2003, pag. 339].

Con riferimento alla *Figura 2 (a)*, supponiamo che le due masse *test* siano sospese verticalmente in modo da potersi muovere liberamente in senso orizzontale, corrispondente al piano della figura.

Una massa è in *S* (porta il *beam splitter*), l'altra in *M* (porta lo specchio) definendo il termine del braccio  $L_x$ , oppure  $L_y$ . Sia  $L_i$  la distanza fra ciascuna delle due coppie di masse (*S,M*), sul piano  $z=0$  perpendicolare alla direzione di propagazione. Un'onda incidente gravitazionale cambierà la lunghezza dei bracci.

Se prendiamo in esame lo stato di polarizzazione «+», e assumiamo che i due bracci dell'interferometro, che cade liberamente (Principio di Equivalenza, vedi *L'eredità scientifica di A. Einstein*, Emmecciquadro n.61 – Giugno 2016) siano orientati secondo gli assi x-y, il braccio  $L_x$  si contrarrà e si espanderà, mentre quello  $L_y$  si espanderà e si contrarrà con fase diversa (vedi *Figura 7*). Precisamente:

$$\frac{\delta L_x}{L_x} = +\frac{1}{2} a \sin(\omega t) \quad ; \quad \frac{\delta L_y}{L_y} = -\frac{1}{2} a \sin(\omega t)$$

L'ampiezza «a» e la pulsazione « $\omega$ » possono essere misurate monitorando la figura d'interferenza sul rivelatore *D*.

I rapporti  $\frac{\delta L_i}{L_i}$ , ( $i = x,y$ ) sono chiamati, mutuando un termine dalla teoria dell'elasticità, *strain*, sforzo prodotto dall'onda gravitazionale e risultano essere, per rivelatori alla distanza della Terra, dell'ordine di  $10^{-21}$ .

Per l'interferometro LIGO con bracci di 4 km, le differenze di lunghezza coinvolte sono dell'ordine di  $10^{-18}$  m.

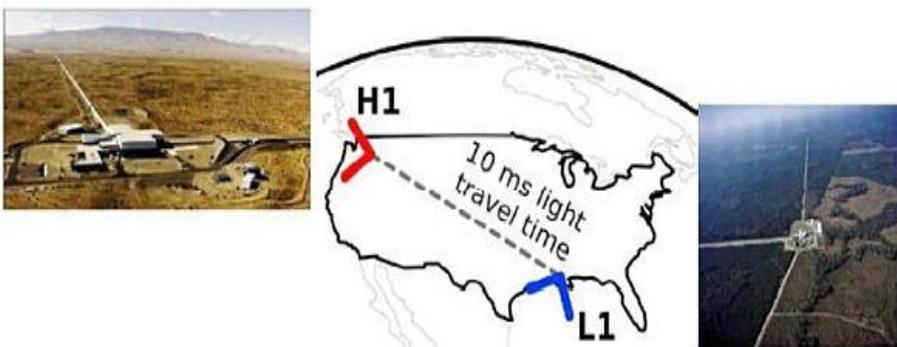
*L'evento osservato*

L'evento, GW150914 (evidenziato in data 14 settembre 2015, dentro la sigla), è stato captato dalle due antenne gravitazionali LIGO (*Figura 3*).

*Le antenne LIGO e VIRGO*

Si tratta di due interferometri, ciascuno come quello descritto in *Figura 2*, posti uno a ovest degli Stati Uniti, Hanford, (Washington), l'altro ad est, Livingston (Louisiana) (*Figura 3*).

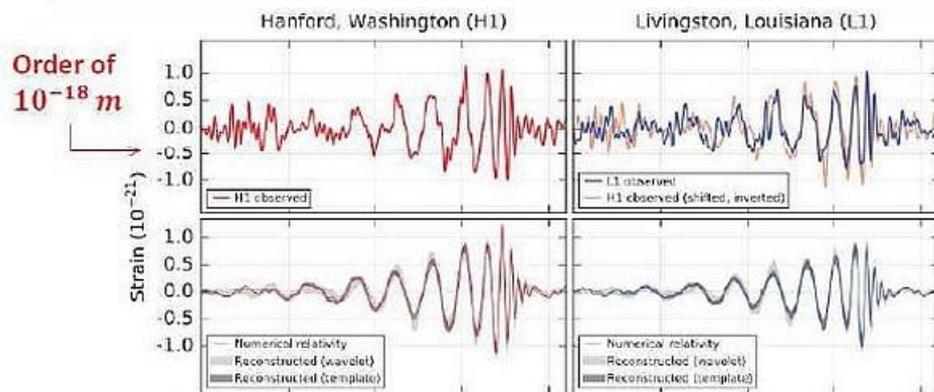
Sono analoghi a VIRGO collocato a Cascina (Pisa) (*Figura 4*) che era, alla data dell'evento, in manutenzione.



*Figura 3: LIGO=Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory. I due interferometri negli Stati Uniti uno ad ovest, Hanford, (Washington), H1, l'altro ad est, Livingston (Louisiana), L1, con bracci perpendicolari di 4 km. Il tempo di percorrenza della distanza fra i due, per un segnale che viaggia alla velocità della luce, è di circa 10 ms [Zendri, 2016].*

*Figura 4: Interferometro VIRGO per rilevare onde gravitazionali, simile ai due LIGO americani (Figura 3), con bracci perpendicolari di 3 Km, in località Cascina (Pisa).*

I due interferometri (H1, L1), hanno captato i segnali riportati in *Figura 5* (pannelli superiori), ricostruiti e confrontati con quelli previsti dal calcolo numerico relativistico (pannelli inferiori).



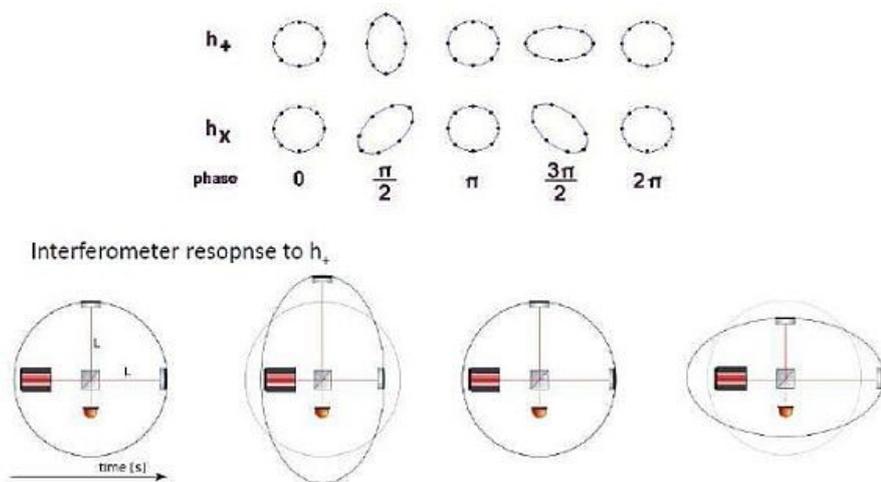
*Figura 5: I segnali captati dalle due antenne gravitazionali (H1,L1) (pannelli superiori). In L1 il segnale ricevuto da H1, è sovrapposto per confronto, traslato di circa 10 ms, causa la distanza fra i due ricevitori. La ricostruzione teorica e il confronto con le ricezioni sono mostrati nei pannelli inferiori [Zendri, 2016].*

**I segnali captati**

I segnali captati dai due interferometri (H1,L1), il 14 settembre 2015, sono rappresentati nei pannelli superiori di *Figura 6*.

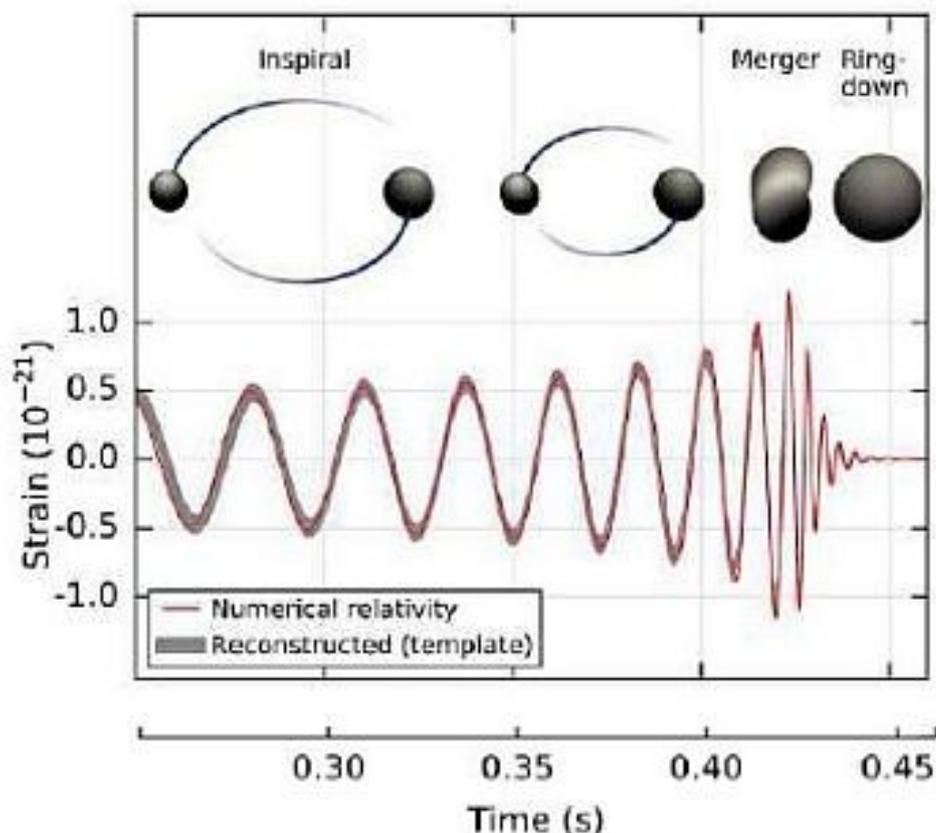
La loro sovrapponibilità, nel pannello di destra, tenuto conto della differenza di ricezione fra le due antenne distanti, in termini di tempo luce, circa 10 ms, garantisce trattarsi del medesimo evento.

La ricostruzione, a partire dalla relatività (pannelli inferiori della *Figura 6*) garantisce che si tratti effettivamente di onde gravitazionali.



*Figura 6 - Effetto dell'onda gravitazionale, con stato di polarizzazione «h+» (in alto), sui due bracci,  $L_x$  (orizzontale),  $L_y$  (verticale), di ciascun interferometro, in funzione del tempo, per un periodo di oscillazione. I due bracci dell'interferometro si contraggono e si espandono con fase diversa (Eq.4.1).*

Il loro effetto sui due bracci dell'interferometro che le riceve, è visualizzato in *Figura 7*.



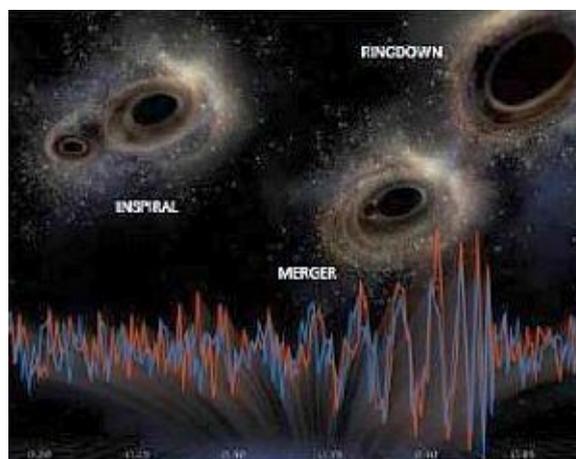
*Figura 7: Interpretazione delle variazioni di frequenza dello strain gravitazionale in funzione del tempo. Si tratta delle fasi successive di un fenomeno di coalescenza di due buchi neri (BH) (v. testo).*

Per semplicità viene considerato solo uno stato di polarizzazione « $h_+$ » che «strizza» o «stira» i due bracci in modo sinusoidale, con diverso sfasamento, dando una ragione immediata delle variazioni della figura d'interferenza sul *detector D*.

#### L'interpretazione

Le caratteristiche dell'evento sono interpretabili con la coalescenza di due BH (*black hole*, *Figura 8*), vale a dire la fase iniziale di spiraleggiamento orbitale (*orbital inspiral*), il loro fondersi (*merger*) e infine la trasformazione del sistema binario in un unico *black hole*.

Una rappresentazione pittorica suggestiva è data in *Figura 8*.



*Figura 8 - Rappresentazione pittorica del merger di due BH come interpretazione dei dati di Figura 7.*

Le caratteristiche del *merger* sono sintetizzate nella Tabella in *Figura 9*). Particolarmente rilevante è l'energia che va in onde gravitazionali, pari a circa  $3 M_{\odot}$  ( $M_{\odot}$  = massa del Sole)

Mass 1	$36.3^{+5.3}_{-4.5} M_{\odot}$	→ Very high!
Mass 2	$28.6^{+4.4}_{-4.2} M_{\odot}$	
Final mass	$62.0^{+4.4}_{-4.6} M_{\odot}$	
Energy radiated in GW	$3.0^{+0.5}_{-0.5} M_{\odot}$	
Spin magnitude  a1	$0.32^{+0.45}_{-0.28}$	
Spin magnitude  a2	$0.57^{+0.40}_{-0.51}$	
Final spin  a <sub>f</sub>	$0.67^{+0.06}_{-0.08}$	
Luminosity distance	$410^{+160}_{-180} Mpc$	

*Figura 9* — Dida: Tabella riassuntiva dei dati che caratterizzano il *merger* di due BH descritto dal trend delle onde gravitazionali di *Figura 8*. L'energia corrispondente è enorme [Zendri, 2016].

**Frequenze e  $\lambda$  tipiche**

Come abbiamo detto, i movimenti di masse causano increspature nello spazio-tempo, descritte dai termini  $h_{\mu\nu}$ , che si propagano come onde. Per poter capire perché l'aumento nel tempo della loro frequenza corrisponda all'avvicinamento dei due oggetti (BH) causando alla fine la loro coalescenza, consideriamo due corpi di massa  $M$  che si muovono l'uno rispetto all'altro e vogliamo ricavare frequenza e lunghezza d'onda del moto ondoso prodotto dal loro reciproco movimento.

Con riferimento alla *Figura 10*, il problema a due corpi di massa  $M$  si riconduce a quello di una massa ridotta  $\mu$ , pari a  $M/2$ , orbitante attorno ad un punto fisso a distanza  $2R$  dove è concentrata la massa totale del sistema,  $M_{tot}$ , pari a  $2M$ .

Nel sistema di riferimento del centro di massa [Università degli Studi di Cagliari], vale l'equazione differenziale:

$$\mu \ddot{r} = -\frac{G\mu M_{tot}}{r^2} + \frac{L^2}{\mu r^3}$$

essendo  $L$  il momento angolare rispetto al baricentro e  $r$  la distanza fra le due masse orbitanti attorno al comune baricentro.

Nel caso di orbita circolare, l'equazione diventa:

$$\frac{G\mu M_{tot}}{r^2} = \frac{L^2}{\mu r^3} = \mu r \Omega^2$$

Sostituendo ad  $r=2R$  (vedi *Figura 10*) e semplificando, si ottiene infine:

$$\frac{2GM}{(2R)^2} = 2R\Omega^2 \Rightarrow \frac{GM}{(2R)^2} = \frac{V^2}{R}$$

essendo  $\Omega$  la frequenza orbitale<sup>6</sup>.

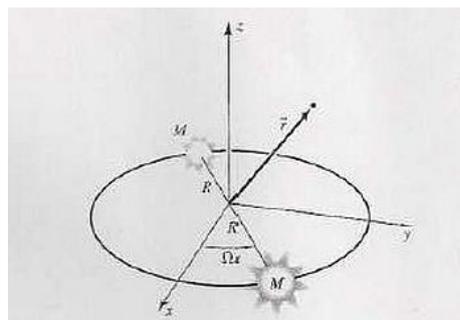
La velocità  $V$  rispetto al baricentro e la frequenza orbitale sono quindi date da

$$V = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM}{R}} ; \Omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

La frequenza e la lunghezza d'onda, risultano quindi, rispettivamente:

$$\nu = \frac{\Omega}{2\pi} \quad \lambda = c \cdot \frac{1}{\nu}$$

da cui si vede che, come la distanza  $R$  fra le due masse fissate si riduce, come quando avviene il *merger* (*Figura 7*), la frequenza  $\nu$  dell'onda aumenta mentre la lunghezza d'onda  $\lambda$  cala. A parità di altre condizioni, lo stesso effetto si ottiene aumentando la massa  $M$ .



*Figura 10* - Sistema binario con due oggetti di uguale massa  $M$  [Hartle, 2003, pg. 503]. Le orbite sono circolari, sul piano  $x$ - $y$ , con velocità angolare  $\Omega$ . L'onda gravitazionale viene emessa lungo una generica direzione  $\vec{r}$ .

**Confronto fra sistemi binari**

Per esemplificare gli sviluppi esposti, consideriamo innanzitutto il sistema binario PSR 1913+16 scoperto da Russell A.Hulse (1950- ) e Joseph H.Taylor (1941- ) nel 1974 e che meritò loro il Premio Nobel nel 1993 [Hartle, 2003, pag.250].

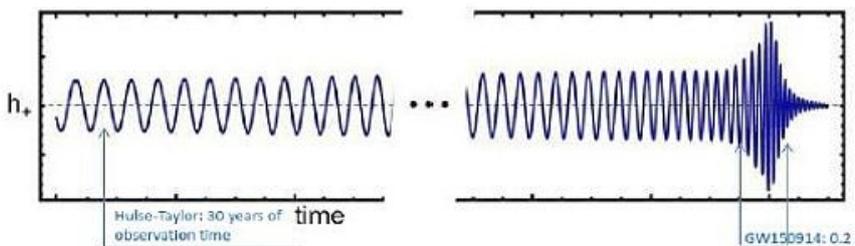
Si tratta di una pulsar binaria con massa di circa  $1.4 M_{\odot}$  sia della pulsar che del compagno invisibile. Il periodo orbitale è circa  $P_b = 7^h 45^m$  ed è stato monitorato per circa 30 anni con il radio telescopio di Arecibo.

La sua diminuzione ha fornito una eccellente prova dell'esistenza di radiazione gravitazionale dovuta al movimento rapido della pulsar nel forte campo gravitazionale del suo compagno invisibile e, nel contempo, una profonda conferma della teoria della relatività [Taylor & Weisberg, 1982]. Usando le formule precedenti, per un raggio orbitale  $R \approx 10^6$  km la frequenza dell'onda gravitazionale, risulta  $\nu = 7 \cdot 10^{-5}$  Hz (vedi Tabella in Figura 11).

Le stesse formule forniscono, per il sistema GW150914, una frequenza molto più alta,  $\nu \approx 117$  Hz usando un valore di  $R \approx 200$  km ed una massa  $M \approx 30 M_{\odot}$  (vedi Tabella e pannello superiore in Figura 11).

**PSR1916+13 versus GW150914**

**Waveform**



PSR1916+13	Binary system	GW150914
NS-NS	Compact object	BH-BH
$M_1 = 1.44 M_{\odot}, M_2 = 1.3 M_{\odot}$	Mass	$M_1 = 36 M_{\odot}, M_2 = 29 M_{\odot}$
$4 \times 10^{-23}$	GW amplitude	$2 \times 10^{-21}$
$7 \times 10^{-5}$ Hz	GW frequency	$30 \div 300$ Hz
$7.4 \times 10^8$ years	Time to merging	$0.3 \div 0$ s
$6 \times 10^{30}$ erg s <sup>-1</sup>	Peak luminosity	$3 \times 10^{56}$ erg s <sup>-1</sup>
6.4 pc	Distance	410 Mpc
$10^6$ km	Radius orbit	$\sim 200$ km

Figura 11: Confronto fra sistemi binari (vedi testo). Le diverse frequenze delle onde gravitazionali nei due sistemi, sono ricavabili dalle equazioni sopra esposte [Zendri, 2016].

**Localizzazione della sorgente e probabilità di falso allarme**

La localizzazione della sorgente è mostrata nel plot di Figura 12, in termini di aree di probabilità, espresse in ascensione retta (RA, orizzontale) e declinazione (DEC, verticale) [Vedovato, 2016].

Con solo due rivelatori, la localizzazione della sorgente non è molto accurata:  $590 \text{ deg}^2$  al 90% di probabilità che si riducono a  $140 \text{ deg}^2$  al 50% di probabilità.

Da notare che:

l'area iniziale (circa  $600 \text{ deg}^2$ ) determinata dai dati L1 e H1, si ridurrebbe di circa un fattore 30, una volta che si usi anche Virgo (Figura 13) [Abbott et al., 2016], [Zendri(a), 2016].

La probabilità che si tratti di un falso allarme è minore di  $2 \cdot 10^{-6}$ .

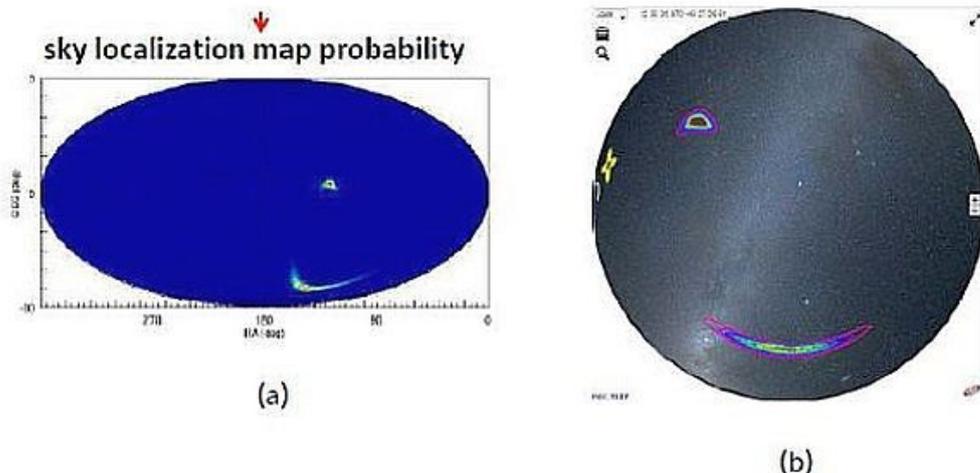


Figura 12: Aree di localizzazione della sorgente in ascensione retta (RA, orizzontale) e declinazione (DEC, verticale) (a). La probabilità decresce verso l'interno a partire dal contorno più esterno pari al 90%, (b) [Vedovato, 2016; Zendri(a), 2016].

## Benefits of a 3 detector network

- Better source reconstruction by triangulation

### Example

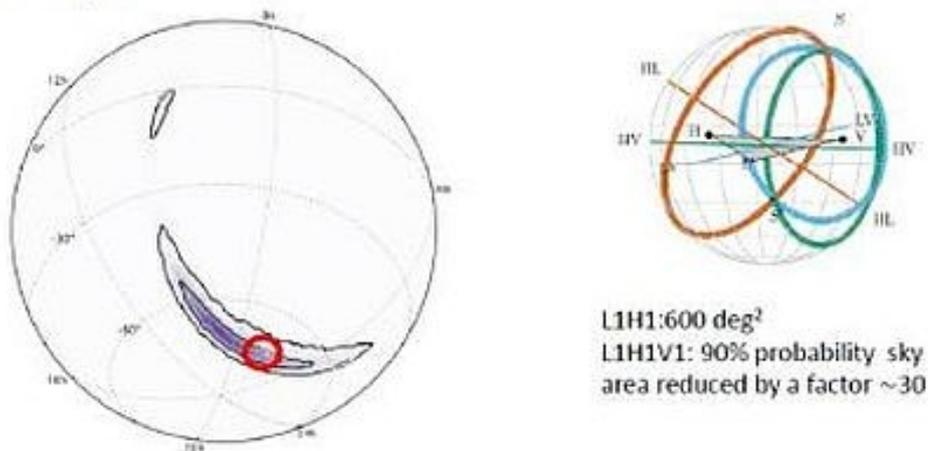


Figura 13 — y Localizzazione della sorgente usando anche VIRGO [Zendri, 2016]. L'area iniziale determinata dai soli dati L1 e H1, si ridurrebbe di circa un fattore 30 (zona in rosso).

## Conclusioni

Mi sono chiesto se si potesse scorgere nell'evento delle onde gravitazionali, qualche significato riconducibile a un ambito oltre a quello della Scienza.

La frase, che già è stata la linea guida di tutta la prima trattazione dell'opera scientifica di Einstein: «quello che c'è, nel mondo, di eternamente incomprensibile, è che esso sia comprensibile», mi pare possa essere anche la chiusura di questa seconda.

C'è nell'Universo una tensione a rivelarsi. L'Universo «desidera» parlare di se stesso; dall'abisso di circa 1.2 miliardi di anni luce, l'evento delle onde gravitazionali risuona ora da noi con un eco con cui il Creato «desidera» mettersi in relazione con l'Uomo che l'osserva.

La relazione, è il tratto caratterizzante la Trinità, così come Cristo ce lo ha rivelato. Ma la tensione alla relazione è ciò che caratterizza l'Amore. All'interno della dinamica dell'Amore ci viene insegnato che, mentre «Dio Padre ...sembra esprimere solo la disponibilità a dare, a darsi...Dio Figlio sottolinea che è divino il riavere... » [Sartori, 2003, pag.42].

Dal Suo capolavoro, l'Artista stesso riceve, è l'eco del Creato. Tuttavia c'è un interlocutore privilegiato in questo dialogo d'Amore, qualcuno a cui offrire il Creato stesso.

«Egli fabbrica con l'Universo che è fabbricato e traccia linee continuamente nuove e libere nel Suo progetto, in un divenire mosso dall'idea finale...del dono all'Uomo, da cui nasce la Bellezza» [Secco, 2016].

Ecco allora perché a questo qualcuno deve essere comprensibile il mondo, perché egli è fatto «a immagine e somiglianza Sua» per la condivisione gioiosa del Creato.

Dalle grandi Religioni Tradizionali, ci viene un insegnamento rilevante, ricordatoci da Dallaporta [Dallaporta 2000, pag.67]. Secondo un *hadith* (parola del Profeta) islamico: «Ero un tesoro nascosto; ho voluto essere conosciuto, ed ho creato il mondo».

Questa è l'unica «necessità» che Dio ha, quella di creare. Si tratta di una esigenza come Sommo Bene e costituisce, come già messo in luce da Sant'Agostino, l'essenza stessa del Reale.

Luigi Secco (Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Padova)

**Note**

<sup>1</sup> Ricordiamo che il simbolo di d'Alembert è:

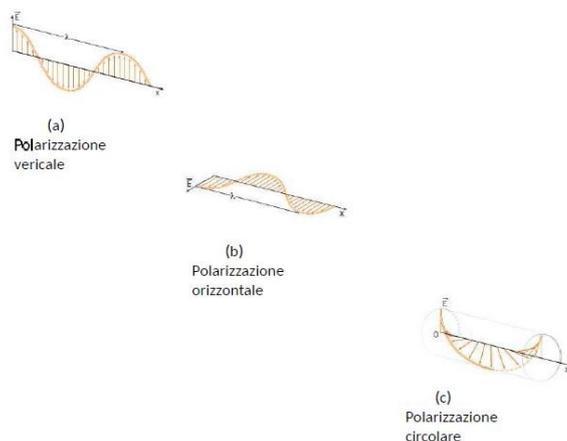
$$\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

<sup>2</sup> Tale da fornire, con la sua integrazione, la corrente di conduzione  $i = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ .

<sup>3</sup> Vale a dire una matrice, in questo caso 4X4

<sup>4</sup> Polarizzazione delle onde elettromagnetiche

Ci riferiamo all'oscillazione del vettore campo elettrico  $\vec{E}$  di un'onda elettromagnetica (trasversale); poiché il campo magnetico è sempre perpendicolare al campo elettrico e ad esso proporzionale, è sufficiente riferirsi a quest'ultimo (vedi Figura).



*Polarizzazione verticale (a), orizzontale (b), circolare (c) di un'onda elettromagnetica*

Se  $\vec{E}$  oscilla sempre su un piano verticale, l'onda è *polarizzata verticalmente*, se oscilla sempre su un piano orizzontale, l'onda è *polarizzata orizzontalmente*. Se invece  $\vec{E}$  ruota attorno alla direzione di propagazione, l'onda è *polarizzata circolarmente*.

Il vettore  $\vec{E}$  ruota spostandosi dal piano verticale a quello orizzontale, per tornare poi a quello orizzontale, descrivendo con la sua punta, una circonferenza con velocità angolare  $\omega$  (in senso orario o antiorario).

Poiché ogni vettore che giace sul piano perpendicolare alla direzione di propagazione può essere scomposto in due componenti, una orizzontale,  $E_x$ , ed una verticale,  $E_y$ , una qualunque onda polarizzata può essere ottenuta come opportuna sovrapposizione di un'onda *polarizzata orizzontalmente* e di un'onda *polarizzata verticalmente*. Si ottiene così la *polarizzazione circolare* (in senso orario o antiorario) quando le due componenti oscillanti,  $E_x$ ,  $E_y$ , sono sfasate fra loro di  $\pm\pi/2$ .

Nel caso in cui lo sfasamento fra le due componenti sia in modulo diverso da  $\pi/2$  (o suoi multipli dispari), si ottiene la *polarizzazione ellittica*, in cui la punta di  $\vec{E}$  descrive sul piano di oscillazione, un'ellisse (in senso orario o antiorario).

- 5 Significa che implicano derivate di qualunque ordine ma non solo di primo grado
- 6 Rimane invariata passando dal sistema con origine nel baricentro a quello con origine in una delle due masse

#### Note Bibliografiche

- Abbott, B.P., et al., 2016, Physical Review Letters, 116, 061102.
- Dallaporta, N., *Semi del Verbo nelle grandi Religioni Tradizionali*, Libreria Editrice Gregoriana, 2000.
- Drago, M., Corso di Dottorato del XXII ciclo, Università di Padova, [www.pd.infn.it](http://www.pd.infn.it)
- Einstein, A., *Memoria del 1916*, in *Cinquant'anni di Relatività*, autori vari, pag.511, Edizioni Giuntine & Sansoni Editore, 1955
- Hartle, J.B., *Gravity, An Introduction to Einstein's General Relativity*, Addison Wesley Edition, 2003.
- L.Sartori, *Per una metafisica dell'Amore*, Studia Patavina, 50, 25, 2003.
- Secco, L., *Ci hai dato il cielo e le chiare stelle*, in corso di pubblicazione.
- Straneo, P., in *Cinquant'anni di Relatività*, autori vari, pag. 29, Edizioni Giuntine & Sansoni Editore, 1955.
- Taylor, J.H., Weisberg, J.M., Ap.J., 1982, 253, 908-920.
- Vedovato, G., Seminario Univ.Padova, 19 febbraio, 2016. [www.virgo.lnl.infn.it](http://www.virgo.lnl.infn.it)
- Zendri, J.P., Seminario Univ.Padova, 19 febbraio, 2016. [www.virgo.lnl.infn.it](http://www.virgo.lnl.infn.it)
- Zendri(a), J.P., Seminario Scuole, marzo, 2016. [www.virgo.lnl.infn.it](http://www.virgo.lnl.infn.it)

**APPROFONDIMENTO**

**Onde Gravitazionali: la trattazione relativistica rigorosa**

In realtà la trattazione teorica è molto complicata<sup>1</sup> rispetto alle considerazioni fatte nel testo dell'articolo, basate solo sull'analogia, per certi aspetti, già in grado di giustificare l'esistenza delle onde gravitazionali.

La riportiamo per completezza, consigliandola solo a chi abbia una certa padronanza di questi argomenti.

*Le onde nel vuoto*

Si tratta innanzitutto di considerare le equazioni di Einstein del campo gravitazionale nel vuoto, vale a dire quando il tensore energia-impulso della materia:

$$T_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$$

Esse si riducono al tensore di curvatura di Ricci,  $R_{\mu\nu} = 0$ ,

che rappresenta 10 equazioni non lineari; linearizzare tali equazioni assumendo che il tensore metrico, nel generico punto<sup>2</sup> dello spazio-tempo quadridimensionale,  $x$ :

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$$

vale a dire sia dato dal tensore della metrica piatta di Minkowski,  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , con l'aggiunta di un termine perturbativo legato all'onda gravitazionale, sufficientemente piccolo:  $|h_{\mu\nu}(x)| \ll 1$ .

Operando poi una trasformazione di coordinate opportuna<sup>3</sup>, del tipo:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$$

dove le  $\xi^{\mu}$  sono quattro funzioni arbitrarie tali che le derivate dei nuovi termini  $h'_{\mu\nu}(x)$ , che ora nella formula  $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$  perturbano la metrica, soddisfino a determinate condizioni<sup>4</sup>, si trova che ciascuna componente perturbativa della metrica (lasciando cadere l'apice, per semplicità) soddisfa alla:

$$\square h_{\mu\nu}(x) = 0$$

che è l'equazione d'onda di d'Alembert per lo spazio piatto.

Per un'onda con *vettore d'onda*,  $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ , la soluzione dell'equazione di d'Alembert è:

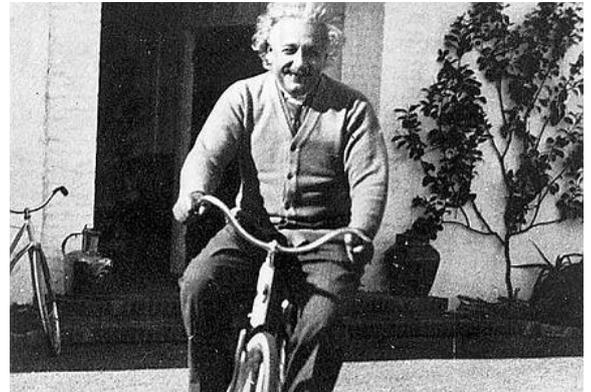
$$h_{\mu\nu}(x) = a_{\mu\nu} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

essendo  $a_{\mu\nu}$  le ampiezze delle varie componenti dell'onda gravitazionale, corrispondenti alle varie componenti perturbative della metrica.

Orientando le coordinate spaziali in modo che l'asse «z» sia la direzione di propagazione dell'onda, si ottiene:

$$h_{\mu\nu}(x) = e^{i(\omega t - kz)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

essendo  $\vec{k} \equiv (0, 0, k)$ , con il tensore  $a_{\mu\nu}$ , in parentesi quadra, caratterizzato dall'aver le ampiezze lungo l'asse «z», tutte nulle (quarta riga) ( $a_{zi} = 0, 0, 0$ ;  $i = 1, 2, 3$ ).



Si vede chiaramente che, dalle condizioni della *gauge* di Lorentz e dal fatto che il tensore,  $h_{\mu\nu}(x)$ , deve soddisfare all'equazione delle onde, la soluzione più generale delle equazioni di Einstein linearizzate, ha la caratteristica di avere solo componenti *trasversali* all'asse di propagazione «z», vale a dire due componenti non nulle lungo «x» (seconda riga) ( $a_{xi} = a, b, 0$ ) e lungo «y» (terza riga) ( $a_{yi} = b, -a, 0$ ).

Il tensore  $a_{\mu\nu}$  risultante ha traccia nulla (*Transverse Traceless (TT) gauge*).

Da notare che il processo di linearizzazione dota le onde gravitazionali di una proprietà di cui non godono invece le soluzioni delle equazioni originali di Einstein non lineari [Hartle, pag.333]: quella di potersi sommare dando luogo ad onde linearizzate che sono ancora soluzioni delle equazioni di Einstein in approssimazione lineare.

Le parti proporzionali ad «a» e «b» nel tensore di perturbazione della metrica, rappresentano i due diversi stati di polarizzazione dell'onda gravitazionale.

La prima è chiamata polarizzazione «+(plus)», la seconda «X (cross)». La soluzione generale è una sovrapposizione di onde con valori diversi della pulsazione,  $\omega = \frac{2\pi}{\lambda} c$ , diverse direzioni di propagazione e diverse ampiezze per i due tipi di polarizzazioni.

#### *Le onde in presenza della materia*

Quando il tensore energia-impulso ha componenti non nulle, non è possibile, in generale, esprimere,  $h_{\mu\nu}(x)$  nella *gauge* TT. Possiamo frazionare la metrica in diversi pezzi, tuttavia solamente la parte esprimibile con la TT, obbedisce all'equazione di un'onda.

Espandendo le funzioni in termini di potenze di  $1/r$ , si vede che, a grandi distanze, predomina ancora tale termine che rappresenta l'onda gravitazionale.

Più precisamente bisogna che,  $r \gg R_{source}$ , dove  $R_{source}$  è la dimensione caratteristica della sorgente, e inoltre che  $\lambda \gg R_{source}$ . La lunghezza tipica dell'onda gravitazionale,  $\lambda$ , è a sua volta data da:  $\lambda = c P$ , con il periodo P dato da,  $P = \frac{2\pi}{\omega}$ , essendo  $\omega$  la velocità angolare con cui varia la sorgente.

#### *Sui limiti adottati*

È fondamentale notare che le considerazioni che vengono qui svolte, sia nel caso di vuoto che in presenza di materia, sono tutte soggette a tre limitazioni [Hartle, 2003, pag.510]:

- piccola curvatura ovunque nello spazio-tempo che permette l'uso di equazioni gravitazionali linearizzate;
- materia non in regime relativistico, cioè dominata dall'energia a riposo;
- velocità molto minori di quella della luce.

A queste limitazioni, certamente non obbedisce un fenomeno come quello che si ipotizza abbia generato le onde gravitazionali osservate, vale a dire la coalescenza di due *buchi neri* (*Black Holes*, BH).

Un tale evento richiede calcoli numerici molto accurati e relative simulazioni. Tuttavia l'approssimazione qui adottata, serve come guida di riferimento per il controllo di quanto numericamente viene poi sviluppato.

Luigi Secco

(Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Padova)

[Torna all'articolo principale](#)

**Note**

<sup>1</sup> E' richiesto un livello minimo specialistico.

<sup>2</sup> Per semplicità si lasciano cadere gli indici  $\mu$ .

<sup>3</sup> Detta di *gauge* (=misura), in analogia con quelle usate per i potenziali del campo elettromagnetico

<sup>4</sup> Dette *condizioni della gauge di Lorentz* [Hartle, pag. 463]. Nel nostro caso la *gauge* viene scelta in modo tale che le nuove variabili di perturbazione della metrica, descritte dal tensore,  $h'_{\mu\nu}(x)$ , abbiano la traccia,  $h'$ , del tensore rovesciata, rispetto a quella,  $h$ , del tensore iniziale ( $h' = -h$ ), da cui il nome: *trace - reversed perturbation variables*.

**Nota bibliografica**

Hartle, J.B., *Gravity, An Introduction to Einstein's General Relativity*, Addison Wesley Edition, 2003.