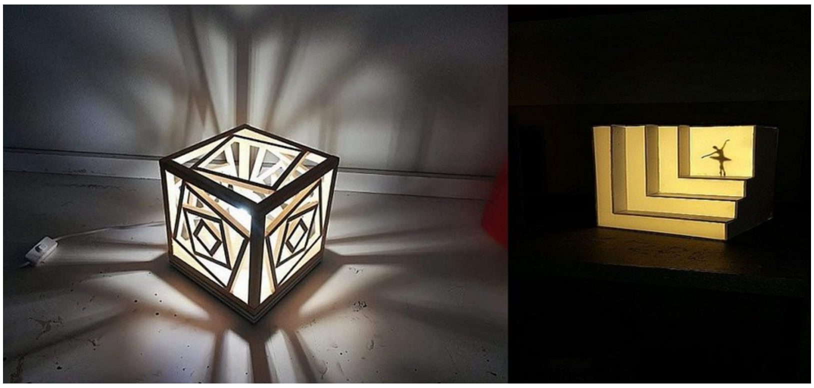
EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica
n. 86
gennaio 2024

IMPARARE A VEDERE … IN 3D

*Anna Maria Marazzini**

** Già insegnante di Matematica nella Scuola Secondaria di primo grado, collabora con "Emmeciquadro" e con l'Associazione Culturale "Il Rischio Educativo". docente di Scienze*

Abbiamo bisogno di esempi ricchi e significativi come quello che proponiamo, per confermarci nella fiducia da riporre da una parte, nell'intelligenza dei nostri alunni, dall'altra, nel fascino innegabile del conoscere la realtà nella sua struttura e consistenza, a cui essi saranno sempre sensibili. Questo è ciò che consente una didattica attiva e davvero orientativa, un apprendimento significativo e stabile. Comunichiamo con semplicità esperienze positive come questa, di tanti insegnanti in questa direzione.



In tutto il primo ciclo non ci stanchiamo di richiamare il grande valore dell'insegnare la Geometria, perché essa, come afferma Ana Maria Millán Gasca, «ha come oggetto l'esplorazione di *concetti astratti* che hanno la loro radice nell'*esperienza*, nella percezione della f*orma* e dell'*estensione*, nel *movimento* e nel rapporto attivo con i *solidi*, con la *misura* e con la *posizione* che è caratteristico dell'operare umano nel mondo. L'esperienza primordiale del *continuo geometrico* è, insieme al contare, *al centro del rapporto tra la mente umana e la realtà*» [1]. Rifacendoci ancora alle sue parole «sviluppare l'intuizione del continuo nel bambino consiste nel portarlo dall'osservazione e dalla percezione (le rappresentazioni tattili, visive, motorie) alla considerazione degli oggetti della geometria euclidea. Tale compito può iniziare prima della scrittura, sotto forma di gioco accompagnato da parole: termini per indicare oggetti astratti (punto, retta, angolo, sfera, cubo, cerchio, triangolo, quadrilatero) e domande o piccoli problemi» [2].
La geometria, infatti, nasce e si sviluppa nell'*esperienza*, in particolare nell'azione del *vedere*: è qui che l'esperienza matematica si rivela un modo di vedere che appartiene all'umano, in particolare un modo di vedere *facendo*, il formarsi della visione di chi è attivo col reale.
Questo aspetto è fondamentale per i ragazzi della scuola Secondaria di primo grado, se nell'educare insegnando desideriamo che ogni alunno faccia esperienza in prima persona di un rapporto ragionevole e significativo per sé con la realtà tutta, in cui il vedere diventi capacità creativa di rivelare le strutture invisibili che celano l'essenza delle cose, e si sviluppi l'astrazione, come una meravigliosa capacità dell'essere umano che permette di incontrare e conoscere la realtà.

La geometria, nel suo inscindibile legame con la realtà fisica, deve fondarsi sull'esperienza. Per questo è ambito privilegiato per occasioni ricche e significa-tive di attività di *laboratorio*.
Ricordiamo che un laboratorio didattico è un momento di profonda *unità di gesto e di pensiero,* in cui le azioni che si propongono e si compiono non sono solo azioni di manipolazione concreta di materiale, ma sono caratterizzate dalla ricerca di consapevolezza della loro origine e del loro scopo, cioè sono rese razionali e significative non dall'oggetto ma dal soggetto. In sintesi, si fa un *laboratorio* quando l'esperienza è davvero un *fare giudicato***.**
Le attività proposte si rivelano dunque generative non solo di addestramento e apprendimento ripetitivo, bensì di immaginazione, creatività e progettazione consapevole, come queste immagini documentano [3].


Figura 1

Incontrare le forme solide

Siamo nella classe terza: i ragazzi si sono già inoltrati nel mondo della geometria, in particolare di quella del piano. Si alza lo sguardo, perché si passa nello spazio, prendendo in esame gli oggetti geometrici tridimensionali. Se non si è impostato l'insegnamento della geometria limitandosi a un repertorio di formule e applicazioni, questo è un anno privilegiato perché essa si dimostri uno straordinario mondo di nuove conoscenze e, soprattutto, di nuove scoperte. Perciò è sempre più importante che si proponga un modo di incontrare e conoscere la geometria che tenga insieme sia la costruzione di modelli concreti sia la riflessione e la dimostrazione, la rappresentazione grafica e la capacità di vedere oltre, l'immaginazione e il rigore logico e del linguaggio, lo stupore per la bellezza.

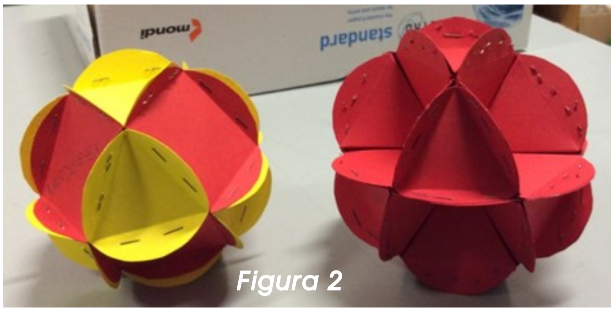


Figura 2

Qui condividiamo un *percorso di esplorazione* delle forme geometriche nello spazio, percorso iniziato dalle forme più belle anche se non le più semplici: i cinque poliedri regolari e i poliedri semiregolari, figure solide che hanno per facce poligoni regolari.
Nella prima fase si sono costruite tali forme assemblando poligoni regolari (*Figura 1*), a partire dalla osservazione di disegni in assonometria o di modelli; poi, in una seconda fase, i ragazzi sono stati invitati a provare a immaginare loro stessi nuovi poliedri.

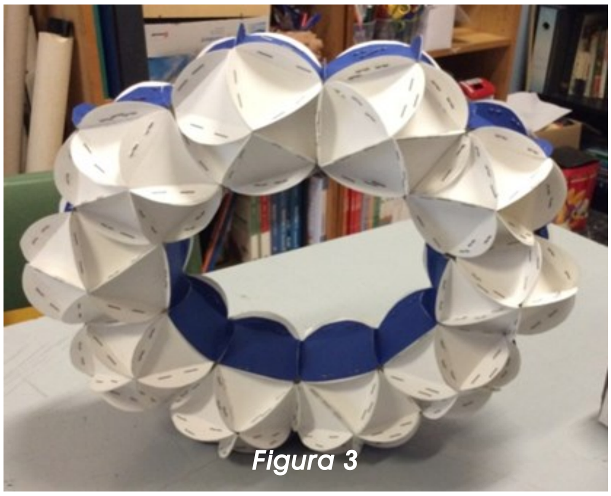


Figura 3

In questo modo si proponeva loro di lavorare con i corpi solidi mettendo *le mani in pasta*, quasi *giocando*, nel senso positivo del termine, con le forme piane: una volta capite le regole fondamentali del gioco - che ogni lato di un poligono deve essere in comune solo a due poligoni e che la somma degli angoli dei poligoni con un vertice in comune deve essere minore dell'angolo giro - i ragazzi potevano provare a generare, inventandoli, nuovi poliedri, anche concavi, come quando in un gioco si inventano nuove strategie (*Figure 2 e 3*).
Nel lavoro concreto è emerso che assemblare la superficie del solido faccia per faccia - qualunque sia la complessità del solido - è più semplice che disegnarne lo sviluppo: infatti, fare lo sviluppo richiede di avere già una visione complessiva di come le facce sono collegate tra loro. Anzi! Riflettere su quali vertici e quali spigoli devono essere fatti combaciare, contribuisce proprio alla formazione della visione dello sviluppo della superficie.

Imparare a vedere: dentro i solidi, dal cubo ad altri poliedri

Nella seconda fase, si sono presi in considerazione i solidi nella loro spazialità, andando a osservare anche l'*interno*, a partire da una forma nota e fondamentale, il cubo. La proposta iniziale è stata la più semplice: taglia il cubo e osserva quello che ottieni.
Abbiamo allora puntato la nostra attenzione sulle *sezioni* di un cubo, analizzando i poligoni ottenuti sul piano di taglio. Sulle facce del cubo si generano infatti parti di quadrati, che costituiscono poi lo sviluppo dei poliedri che compongono il cubo stesso.
Anche in questo caso abbiamo lavorato insieme in classe procedendo per gradi, su un esempio, individuando nel lavoro i criteri fondamentali di metodo nella scoperta: l'osservazione, la descrizione, la costruzione.
I ragazzi avevano a disposizione il disegno del cubo sezionato, fornito dal libro di testo, e anche alcuni modelli costruiti da ragazzi di classi degli anni precedenti, utili da guardare e maneggiare per chi faticava a interpretare correttamente i disegni in assonometria cavaliera. (Figure 4 e 5)

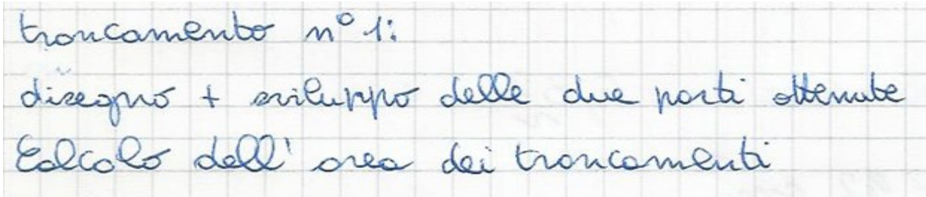


Figura 4

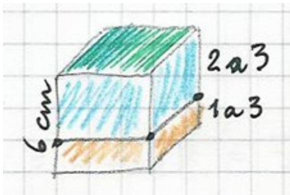


Figura 5

In un momento di dialogo in comune, si sono esplicitati insieme i passi di osservazione e di progettazione che portano alla rappresentazione dello sviluppo, e si sono espresse le relazioni significative fra gli elementi. Infatti per imparare a guardare con *occhio geometrico*, è importante fissare l'attenzione sulle **relazioni** fra gli elementi delle figure in esame, per riconoscerle e riuscire a esprimerle.
Nei disegni riportati (Figure 6, 7, 8) si riconosce come sono stati utilizzati i colori per identificare le facce – stesso colore per facce congruenti - e l'introduzione dei simboli per esplicitare ed esprimere le semplici espressioni letterali dei rapporti fra gli spigoli. Così la geometria si è dimostrata una feconda *incubatrice* dei significati dell'algebra!

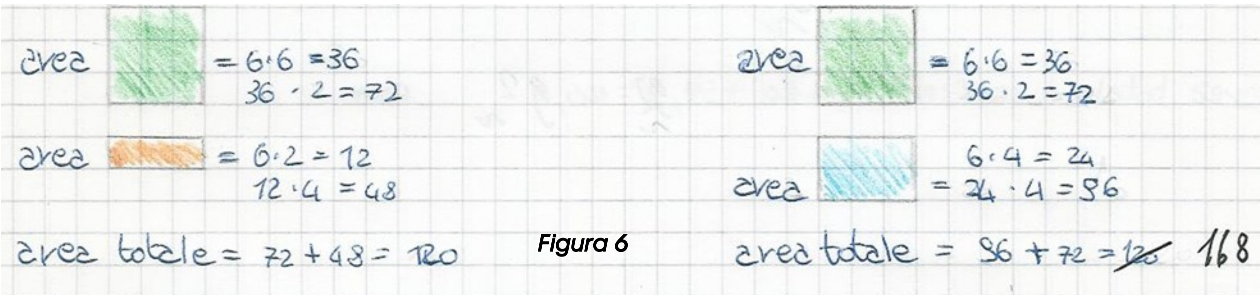


Figura 6

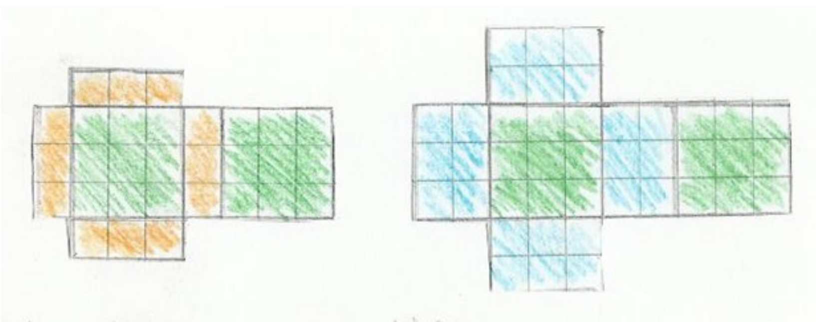


Figura 7

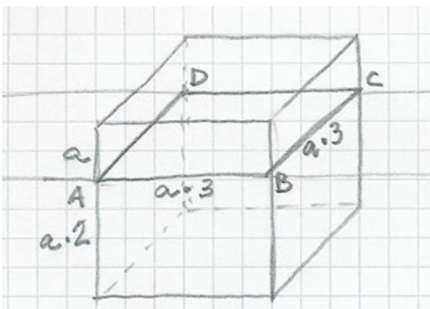


Figura 8

È stato importante notare che i ragazzi hanno dovuto guardare i solidi da diversi punti di vista, e hanno dovuto saper riconoscere la forma quadrata là dove nel disegno ciò che si vede è un parallelogramma (Figure 9 e 10).

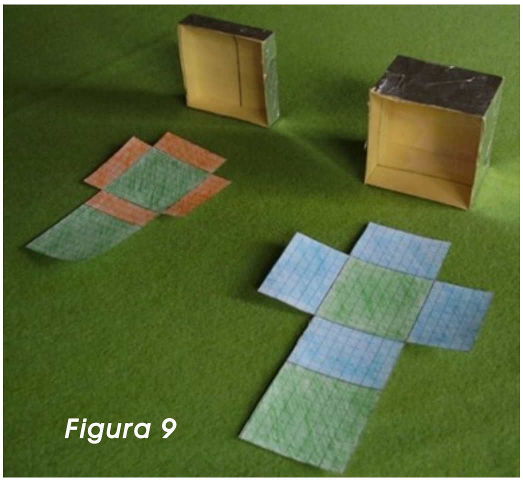


Figura 9

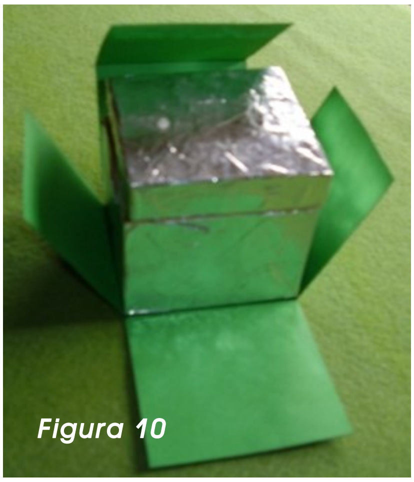


Figura 10

È un passaggio di astrazione, che sicuramente è stato favorito da quanto i ragazzi hanno imparato disegnando proiezioni ortogonali nelle ore di tecnologia, ma comunque non è stato facile per tutti.

Nel lavoro concreto, nuovi problemi e nuove scoperte

Dopo la fase di lavoro in classe, è stato assegnato per la settimana successiva un compito a casa: esaminare due particolari tipologie di sezioni di un cubo, ricostruendone le parti solide e lo sviluppo. (Figure 11, 12, 13, 14).
Questa richiesta, soprattutto nel secondo esempio, ha rivelato una difficoltà di visione e di riconoscimento, ma proprio l'errore di alcuni ragazzi, illustrato nei disegni, ha generato una domanda ed è stato lo spunto per iniziare un lavoro di ricerca e riflessione, che ha consentito un ulteriore passo nella capacità di fare luce sulle relazioni tra elementi nello spazio.

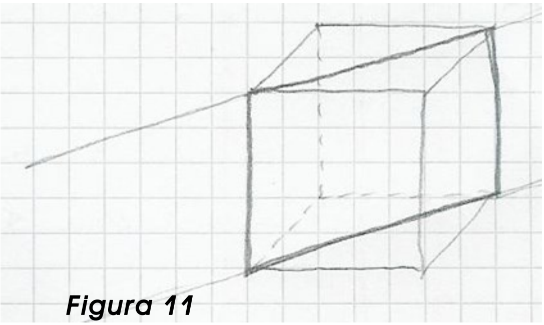


Figura 11

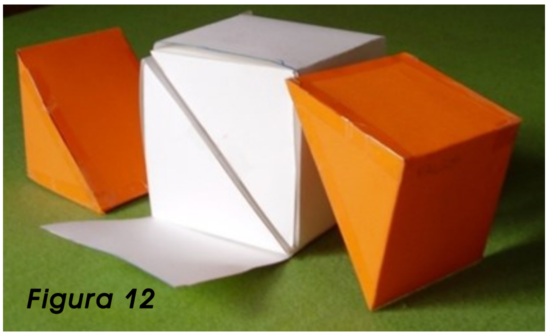


Figura 12

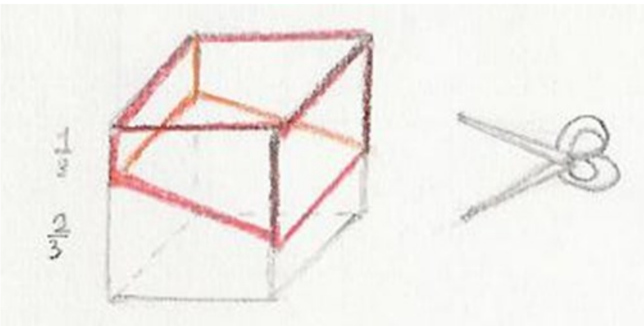


Figura 13

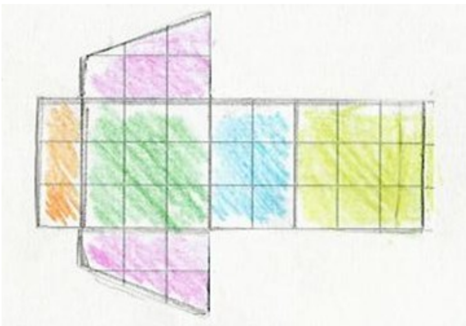


Figura 14

Ripiegando lo sviluppo con la sezione quadrata i ragazzi si accorgono che, anche se per poco, la superficie non si chiude (Figura 15): perché?

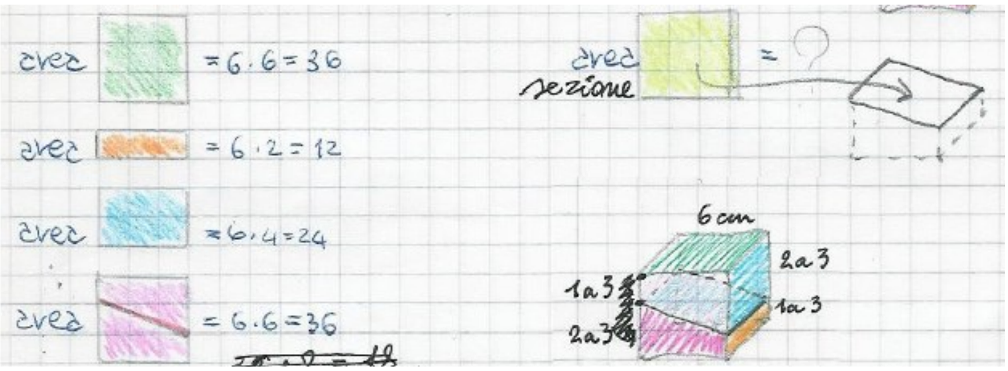


Figura 15

Un ulteriore importante sviluppo del lavoro è stato che, costretti a chiederci come era stato tagliato il cubo, più precisamente, quale posizione avesse il *piano di taglio* rispetto alle facce del cubo (*Figura 16*), nel discorrere tra noi abbiamo cominciato a parlare di *piani paralleli* o *non paralleli*, *perpendicolari* o *non perpendicolari*, di *piani incidenti* e di *angoli diedri*, di *rette perpendicolari o meno a un piano*, …

L'esito è stato quindi non solo la correzione dell'errore, ma soprattutto un accesso davvero significativo agli elementi fondamentali della geometria dello spazio, alle loro relazioni e al lessico specifico!

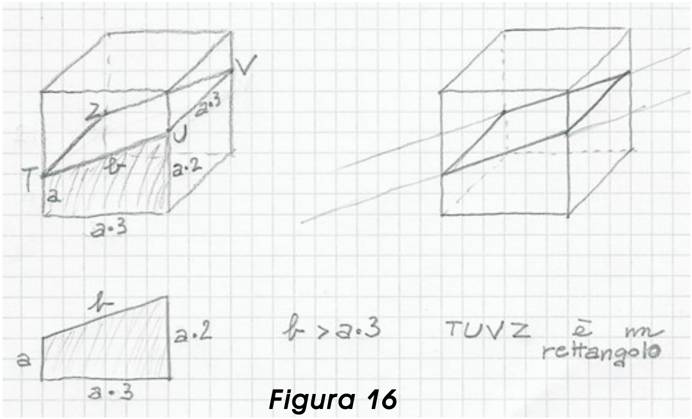


Figura 16

E poi una nuova sfida: le sezioni del cubo non sempre generano quadrilateri! (*Figure 17, 18, 19, 20, 21*)

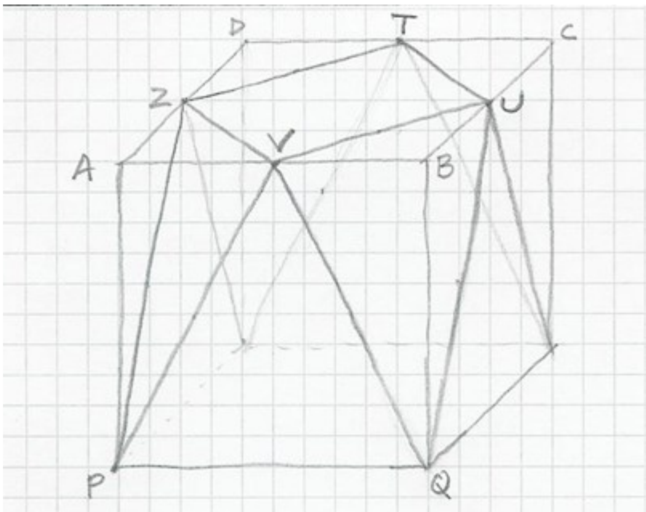


Figura 17

Z, V, U, T sono i punti medi dei lati di ABCD. Le sezioni sono triangoli isosceli. Perché?

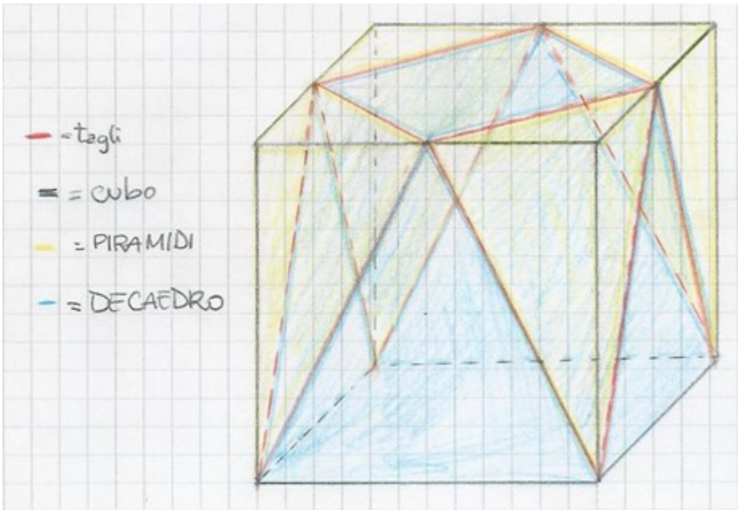


Figura 18

Disegno di un ragazzo. Anche il lavoro di copiatura di una figura non deve essere sottovalutato ai fini della maturazione del pensiero geometrico.

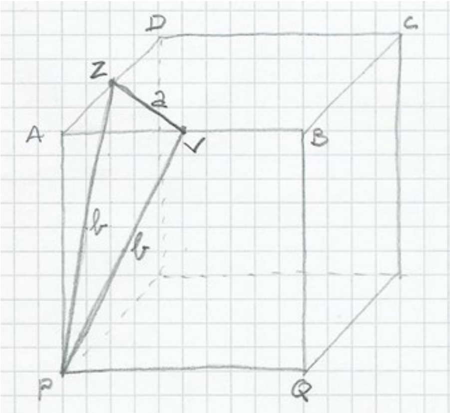


Figura 19

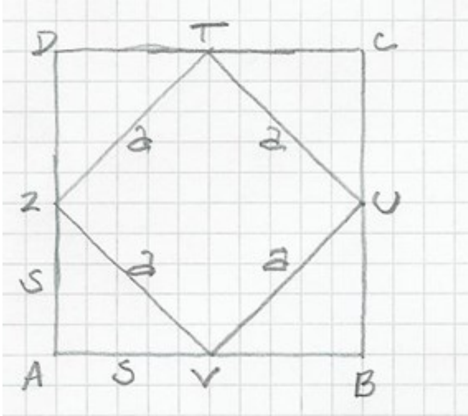


Figura 20

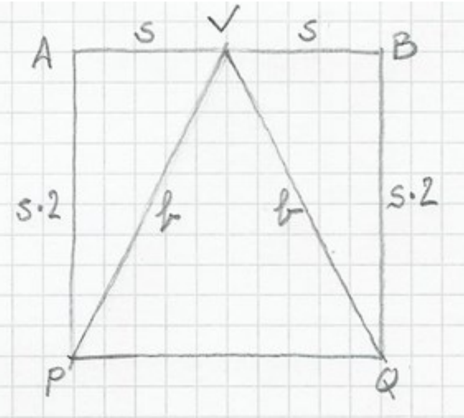


Figura 21

Otteniamo uno strano poliedro e strane piramidi … e viene voglia di costruirne altri. (*figura 22*)

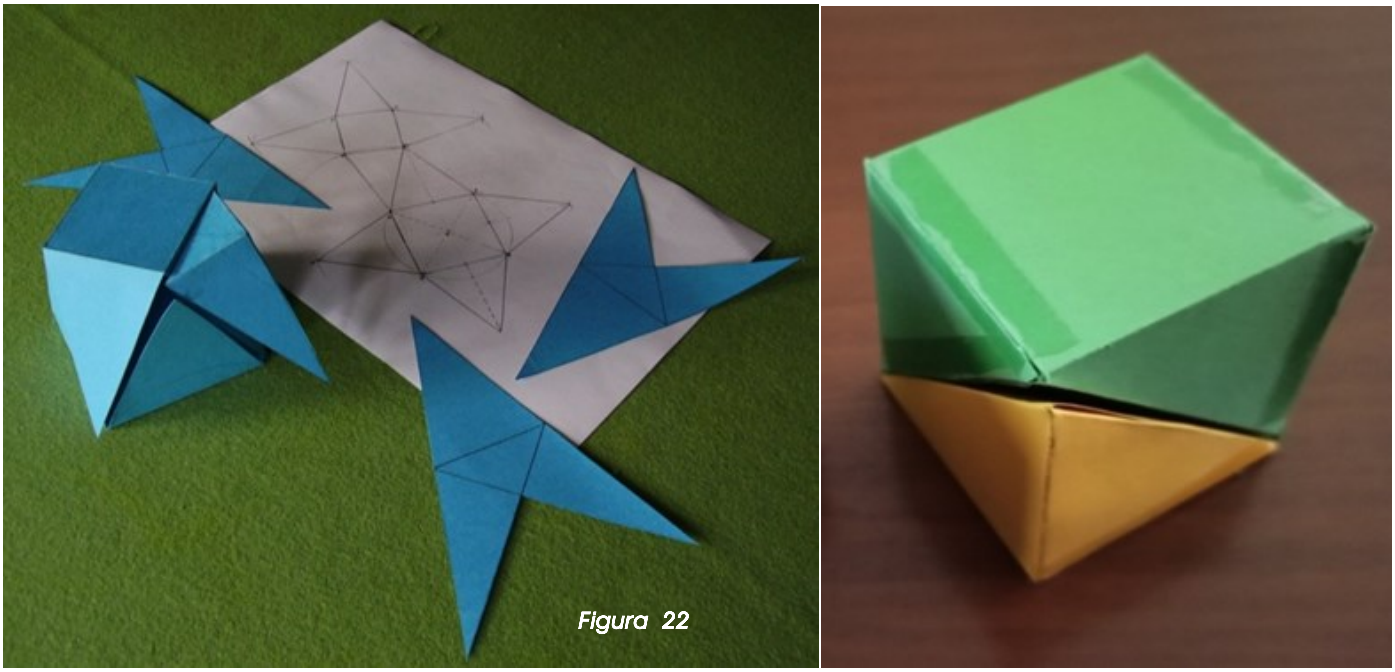


Figura 22

Da qui è iniziato un cammino di proposte e di scoperte, diversificate in base alle abilità e al livello di comprensione raggiunto dai ragazzi, corrispondente alle loro diverse capacità di visione.

Verbalizzare e argomentare per rielaborare e apprendere

L'ultima, ma non certo la meno importante, fase di un *laboratorio* richiede che tutti i ragazzi producano su foglio protocollo una loro *relazione* del percorso fatto.
Nel lavoro delle sezioni, la relazione doveva comprendere, oltre al resoconto dello svolgimento, anche il disegno in assonometria del cubo sezionato e dei poliedri ottenuti, la descrizione della sezione e della superficie dei poliedri, faccia per faccia - mettendo in luce relazioni di congruenza e di posizioni reciproche nello spazio - e il disegno degli sviluppi. Inoltre, si chiedeva di allegare alla relazione il disegno degli sviluppi su cartoncino, in modo che, visionato ed eventualmente corretto, poteva essere tagliato per ottenere i modelli.

Esempio di relazione relativa a uno dei troncamenti più difficili. (Figure 23, 24, 25, 26)

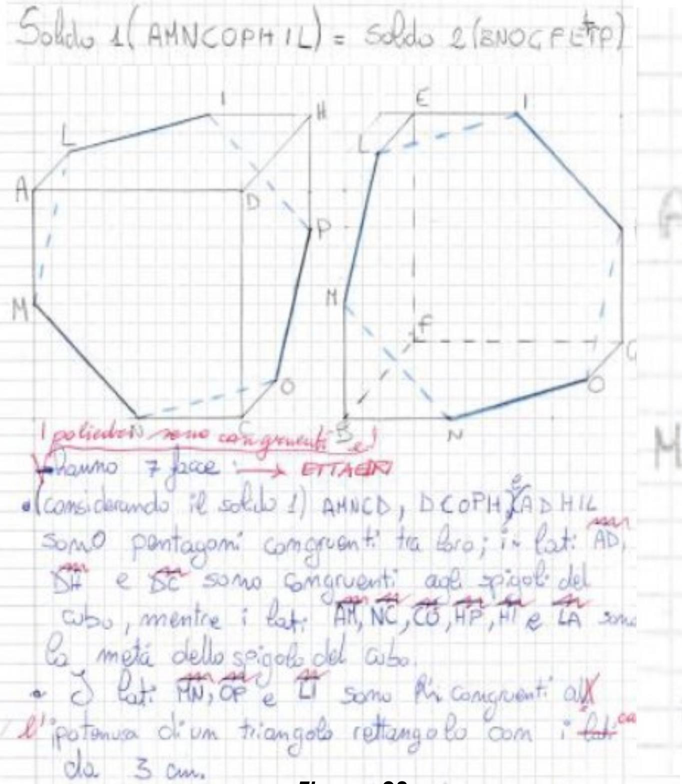


Figura 23

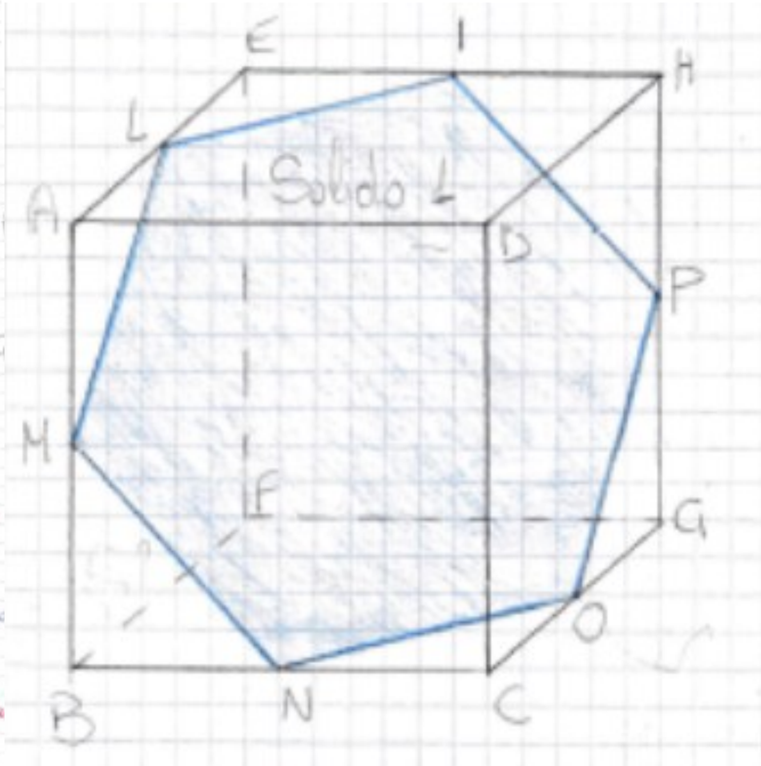


Figura 24

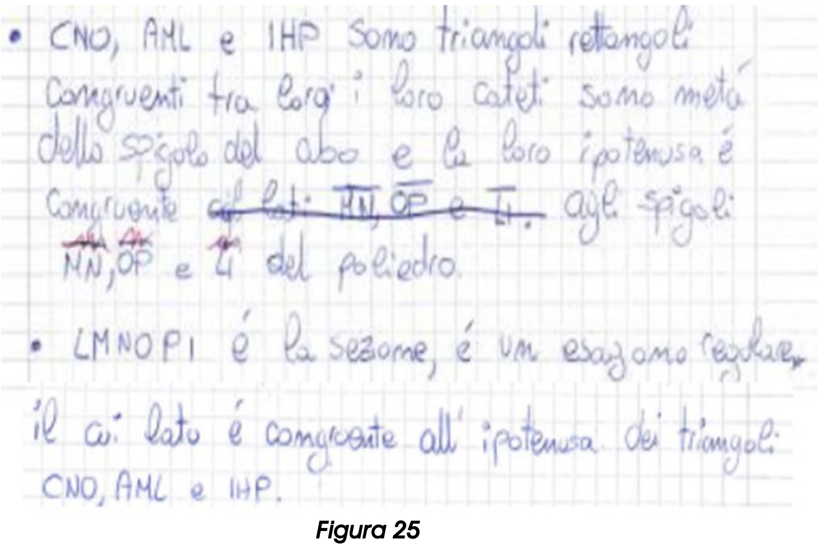


Figura 25

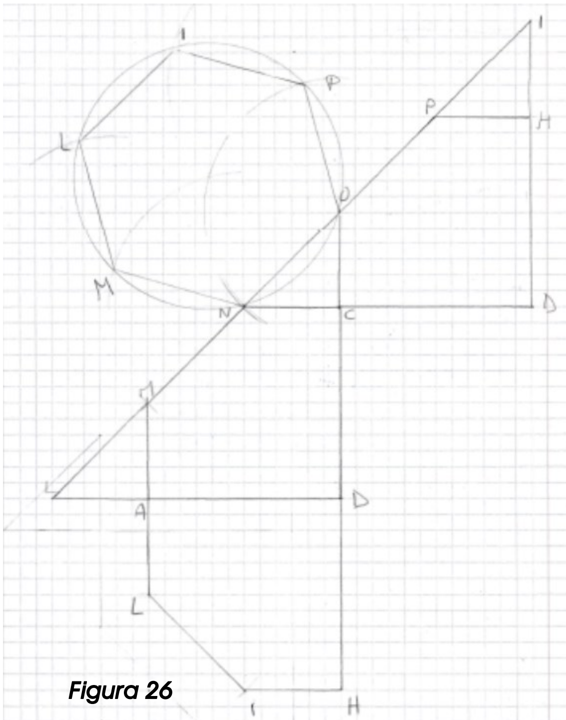


Figura 26

Nelle loro relazioni, si è notato che per i ragazzi è stato più semplice esplicitare le relazioni fra segmenti e poligoni (congruenza e rapporti), mentre dovevano essere guidati o ricorrere all'osservazione di un modello, per riuscire a vedere ed esplicitare le relazioni di parallelismo o perpendicolarità nello spazio.

Germi di nuovi concetti: verso i volumi e le aree nei solidi

Lavorando su altri esempi di troncamenti, del tipo in figura 27, che generano diversi tipi di prismi, è stato possibile impostare il lavoro di osservazione, descrizione e definizione dei prismi retti.
Inoltre, manovrare questi modelli, che possono essere smontati e ricomposti con disposizioni diverse, ha permesso abbastanza spontaneamente di introdurre il concetto di equiscomponibilità nello spazio tra poliedri equivalenti, e il tutto senza calcoli! (Figure 27, 28, 29).


Figura 27

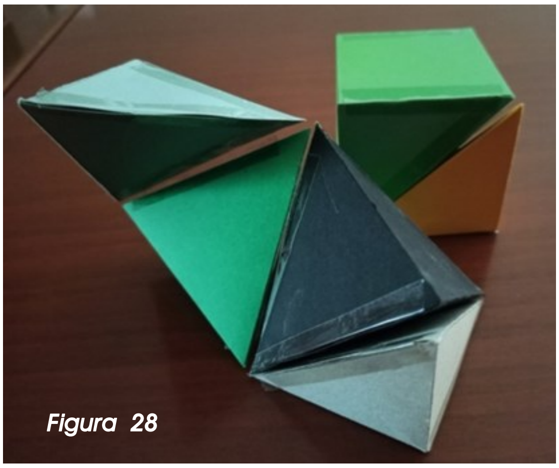


Figura 28

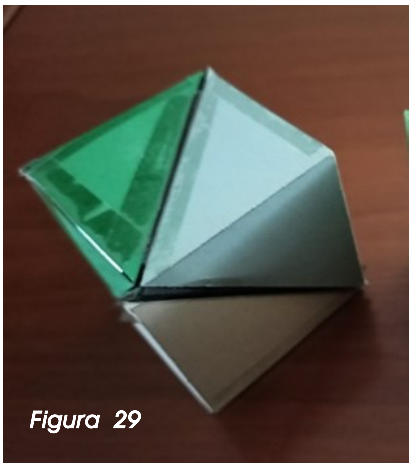


Figura 29

E proprio prendendo spunto da un troncamento già proposto (vedi Figura 22), una ragazza ha provato a tagliare il cubo lungo altri due piani, ottenendo un risultato inatteso: togliendo le tre piramidi appare un tetraedro regolare!
Possiamo vedere in questo risultato un germe del calcolo del volume per le piramidi.

Algebra e geometria crescono insieme

Infatti, siamo partiti dal modello di cubo e lo abbiamo infilzato con spiedini nei vertici, per contarne le diagonali. Ma i ragazzi hanno notato e voluto indagare un'altra cosa: costruendo le diagonali, all'interno del cubo si erano formate alcune piramidi (Figure 30, 31).

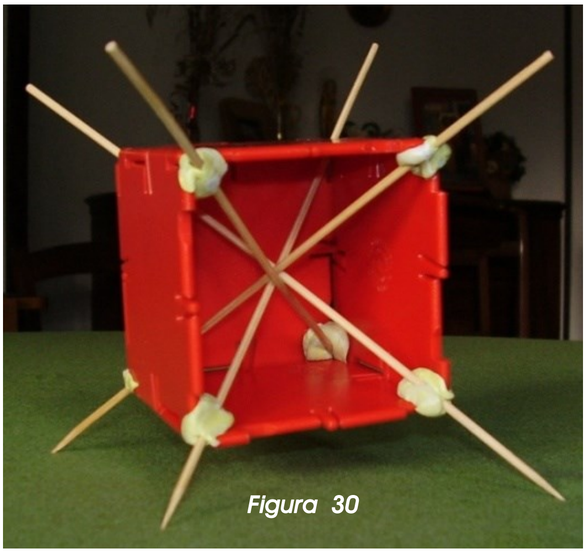


Figura 30

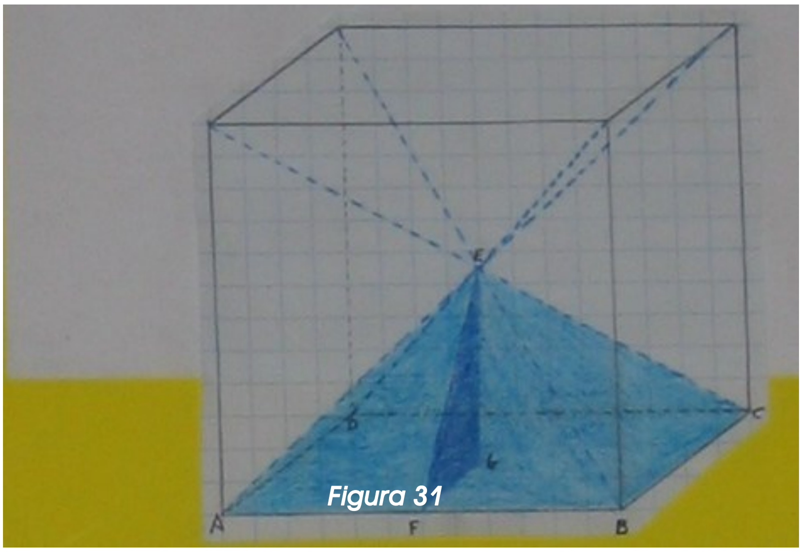


Figura 31

Sviluppando le osservazioni, sono arrivati a concludere che le piramidi erano 6, una per ogni faccia del cubo; che le piramidi erano congruenti, e che gli spigoli laterali misuravano quanto metà della diagonale del cubo.

Rappresentando lo sviluppo di una di queste piramidi, i ragazzi si sono chiesti se le facce fossero triangoli equilateri o no, poi hanno proposto di verificare empiricamente la questione, e alcuni di loro hanno costruito le sei piramidi. Le costruzioni però non convincevano tutti, infatti si sono rivelate poco precise, come alcuni hanno osservato *(Figure 32, 33, 34).*

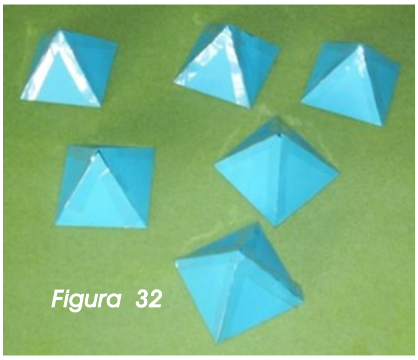


Figura 32

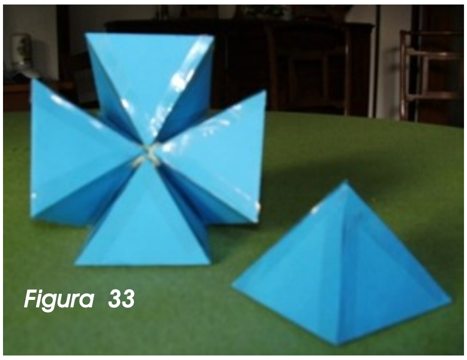


Figura 33

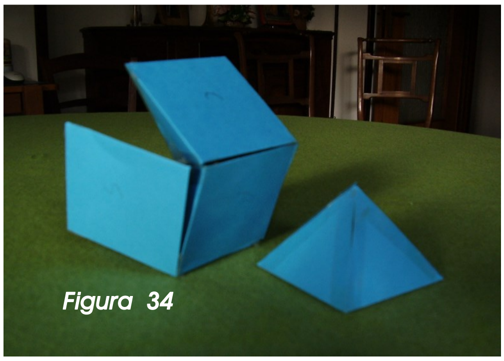


Figura 34

La domanda se le facce fossero triangoli equilateri o triangoli solo isosceli restava perciò aperta.
Ciò che è stato più interessante è stato vedere come il procedimento messo in atto per rispondere alla domanda abbia prodotto una successione di scoperte in ogni suo passo. Inoltre, nell'arrivare ad esprimere la relazione corretta tra lo spigolo del cubo e la sua diagonale – passando dal calcolare la diagonale di ogni faccia, poi nell'esaminare il triangolo rettangolo formato da uno spigolo, la diagonale di una faccia e la diagonale del cubo – è stato quasi spontaneo utilizzare *lettere invece che numeri*: ancora una volta, un esempio della significatività e quindi dell'utilità dell'algebra delle lettere. Ma è davvero da esempi analoghi che si afferra la potenza della simbolizzazione, che può convincere più di ogni altra cosa della verità o della non verità di ipotesi, che possono essere in conflitto con l'intuizione o contro l'apparenza (in un cubo così piccolo la differenza fra i due spigoli confrontati è piuttosto piccola).
Infatti, il percorso è proseguito. Passando al calcolo dei *volumi*, abbiamo affrontato una nuova questione: il confronto del volume della piramide con quello del parallelepipedo che si ottiene tagliando il cubo con un piano parallelo a una faccia e passante per il vertice di una delle sei piramidi *(Figura 35).*
Dopo aver osservato che i due solidi hanno stessa base e stessa altezza, i ragazzi hanno espresso un'ipotesi seguendo un'*analogia* con le aree: sapendo che per i triangoli rispetto ai rettangoli se la base e l'altezza sono uguali l'area è la metà, analogamente potrebbe essere che il volume della piramide sia la metà di quello del parallelepipedo.
Abbiamo impostato la ricerca come se stessimo svolgendo un'indagine poliziesca, iniziando dal raccogliere, organizzare e riflettere sugli indizi. Tirar fuori gli indizi, mettere le carte in tavola, fare luce su ciò che c'è, è un punto nodale nella *risoluzione dei problemi*, perché è da qui che si possono guidare i ragazzi alla esplicitazione, alla enunciazione e alla scrittura di ciò di cui prendono consapevolezza.
Se questa è la nostra *scena del delitto*, che cosa vediamo?

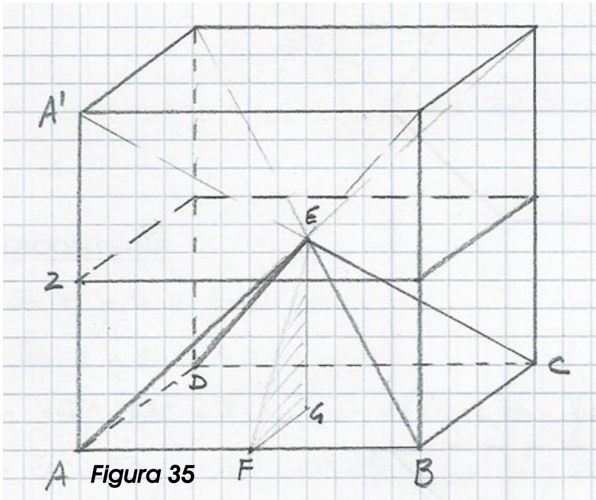


Figura 35

- cubo, parallelepipedo, piramide hanno la stessa base
- piramide e parallelepipedo hanno la stessa altezza
- il cubo ha altezza doppia di quella del parallelepipedo e di quella della piramide.

Poiché sappiamo che:

$V_{\text{parallelepipedo}}$ = metà di V_{cubo} e che V_{cubo} = 6 volte V_{piramide}

non servono calcoli per concludere che

$V_{\text{parallelepipedo}}$ = 3 volte V_{piramide}

Dunque, l'ipotesi che si era fatta NON è vera! È stata proprio una sorpresa! In una situazione particolare abbiamo dimostrato che la piramide è equivalente a un terzo del parallelepipedo con stessa base e stessa altezza. E tra l'altro si apre una nuova domanda: sarà vero in generale? a quali condizioni?
È stato anche utile invitare i ragazzi a tornare a guardare meglio: così si vede che, se immaginiamo di tagliare a metà il cubo, le 4 piramidi con la base sulle facce laterali del cubo stesso vengono tagliate a metà; abbiamo quindi, all'interno del parallelepipedo, 4 mezze piramidi che equivalgono a 2 piramidi, più una piramide intera, in totale 3 piramidi.
Come avevamo ottenuto dalle relazioni algebriche simbolizzando con un semplice procedimento, che pure è utile, oltre che particolarmente gratificante, riproporre nella sua generalità. (*Figura 36*).

$$V_{cubo} = s^3$$

$$V_{parallelepipedo} = \frac{s^3}{2}$$

$$V_{piramide} = \frac{s^3}{6}$$

$$\text{rapporto} \rightarrow \frac{V_{parallelepipedo}}{V_{piramide}} = \frac{\frac{s^3}{2}}{\frac{s^3}{6}} = \frac{\cancel{s^3}}{{}_1\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{s^3}} = 3$$

Figura 36

Qualche considerazione

Aver concretamente costruito quella piramide ha offerto un contesto, dentro il quale per i ragazzi è stato significativo osservare e indagare la diagonale del cubo, sperimentando che in matematica un lavoro può non essere solo fine a se stesso, ma può aprire ad altro, rivelandosi strumento per arrivare a qualcosa di imprevisto ma molto interessante: la scoperta di una nuova relazione, espressa in una nuova formula; e stiamo certi che una formula che non è stata *appiccicata* dall'esterno, ma così operativamente e sorprendentemente *scoperta* non sarà più dimenticata!
Ancora una volta, costruiti i modelli delle sei piramidi, i ragazzi le hanno *montate* insieme a formare quello che alcuni hanno chiamato lo *sviluppo solido del cubo*, cioè lo sviluppo pieno. (*Figure 37, 38, 39*)

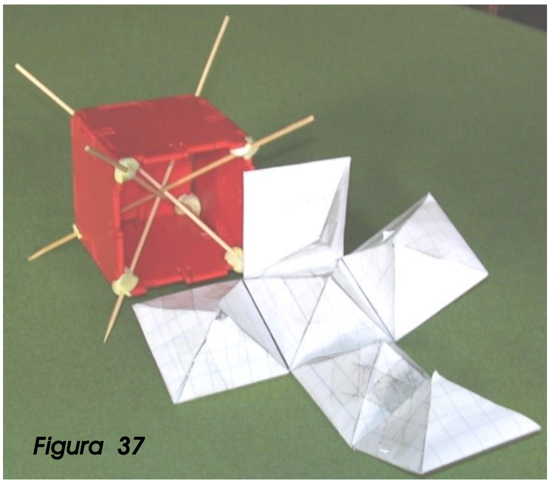


Figura 37

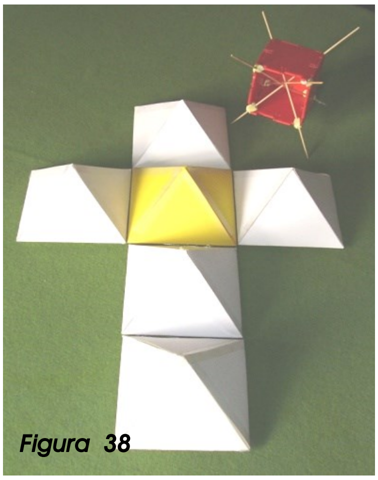


Figura 38

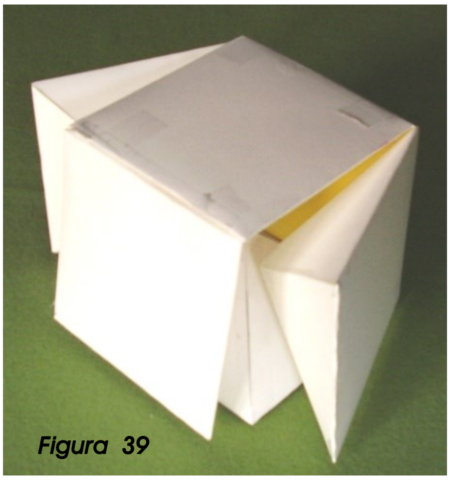


Figura 39

In questo esempio si è visto efficacemente il percorso di *raffinamento* dell'osservazione: dal vedere solo con gli occhi, al *vedere con gli occhi della mente*, cioè appropriarsi dei contenuti unitamente agli strumenti linguistici che danno fondamento / giustificazione, che fanno vedere in modo convincente anche ad altri.
È stato un forte esempio di come l'osservazione conduce alla dimostrazione, e tutto il percorso fatto può inoltre essere un esempio significativo riguardo a come si può arrivare a definire. Avendo costruito, rappresentato, osservato, descritto, i ragazzi erano ora pronti a comprendere - alcuni anche a elaborare loro stessi - le articolate definizioni di poliedro, prisma retto o regolare, piramide retta o regolare; avevano davanti agli occhi esempi e contro esempi che facevano loro capire come fosse determinante dire o non dire una certa parte della frase affinché quella frase individuasse inequivocabilmente quel certo solido.

Inoltre si può dire che questo percorso, che ha impegnato i ragazzi per circa 16 ore all'inizio dell'anno e successivamente per altre 6/8 ore, ha permesso a ognuno di loro di coinvolgersi attivamente secondo le proprie conoscenze e capacità che si sono poi ampliate, arricchite, rafforzate e soprattutto rese più consapevoli. Durante lo svolgersi delle ore si sono potuti osservare i ragazzi all'opera e raccogliere elementi utili alla valutazione, non solo riguardo all'apprendimento ma anche riguardo ad alcune competenze, quali il senso di responsabilità, che si realizza per esempio nel portare a termine un lavoro, la capacità di collaborare, che si traduce a volte anche nel semplice ascolto di compagni e insegnante, la capacità di organizzare il proprio lavoro che si esprime per esempio nel fatto che l'alunno porta e conserva con cura strumenti e materiali. Altri elementi utili alla valutazione sono stati raccolti dalla correzione delle relazioni e da una prova scritta.
È possibile che lo stesso percorso non possa essere replicato in un'altra classe, in quanto molto del suo svolgersi è dipeso dalle intuizioni e dalle proposte dei ragazzi di quelle classi, unito anche all'apporto di quanto i ragazzi stavano imparando durante le ore di tecnologia. Tuttavia, ciò che conta è progettare e proporre percorsi di ricerca ed essere disposti a lasciarsi sfidare dalle domande che ne possono nascere, anche uscendo dai percorsi lineari prestabiliti, ma avendo chiari obiettivi e criteri del proprio insegnamento.
È dentro questa esperienza condivisa che le parole acquistano spessore, che i concetti maturano e si approfondiscono. Ciò che si è reso evidente è che i ragazzi esplorando situazioni anche complesse, prendendo sul serio i segnali che l'insegnante forniva loro per recuperare, ripensare, riordinare, esprimere quanto scoperto, si sono appropriati in modo attivo e stabile di procedimenti, idee e parole.

Anna Maria Marazzini
(già insegnante di Matematica nella Scuola Secondaria di primo grado, collabora con "Emmeciquadro" e con l'Associazione Culturale "Il Rischio Educativo").

Note

[1] G. Israel, A. Gasca, *Pensare in matematica,* Zanichelli, Bologna 2012, pp. 127.

[2] A. Millán Gasca *Numeri e forme,* Zanichelli, Bologna 2016.

[3] Laboratorio di Tecnologia, classi terze, Scuola Secondaria di primo grado "San Tommaso Moro" (insegnante Lidia Bersani).

EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
https://www.ilsussidiario.net/news/emmeciquadro/

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389
Emmeciquadro (online)