

## PREMIO NOBEL PER LA FISICA 2024 attribuito a John Hopfield e Geoffrey Hinton

di Mirko Cesarini\*



*Il premio Nobel per la fisica nel 2024 è stato attribuito a John Hopfield e Geoffrey Hinton per le scoperte ritenute fondamentali nel campo del Machine Learning (ML) e delle Artificial Neural Network (ANN) [1].*

*In questo articolo saranno esplorate le Hopfield Network e le Boltzmann Machine sviluppate rispettivamente da Hopfield e Hinton, attraverso alcuni esempi e un inquadramento teorico che mostrerà come queste scoperte hanno posto le basi per i moderni sviluppi del ML e della AI. Tutti questi lavori sono stati ispirati dall'osservazione del funzionamento dei neuroni in cervelli biologici. Le ANN, uno degli elementi più promettenti nel campo della AI, sono state profondamente influenzate dai lavori di Hopfield e*

*\* Ingegnere informatico. Ricercatore a tempo indeterminato presso il Dipartimento di Statistica e Metodi Quantitativi dell'Università di Milano Bicocca docente di Scienze*



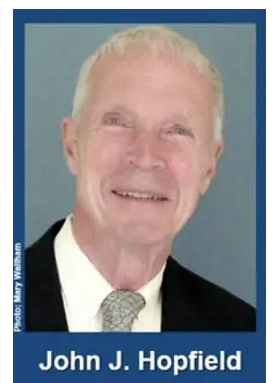
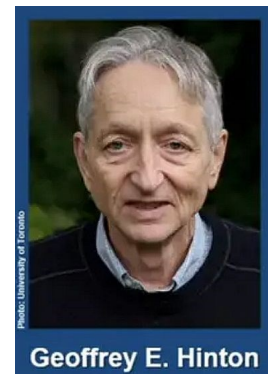
### Hopfield Network

Per introdurre le *Hopfield Network* sarà utilizzato un esempio immaginario ma ispirato a un caso reale. Il dottor Ignaz Semmelweis [2] iniziò a lavorare nella divisione di ostetricia dell'ospedale di Vienna il 1° luglio 1846. Dopo i primi giorni di lavoro, si rese conto che erano presenti (troppi) casi di mortalità materna. La principale causa in Europa a quel tempo era il batterio streptococco, tuttavia all'epoca ciò non era noto. Nella seguente tabella sono riportati dei dati che descrivono la situazione che il dottor Semmelweis aveva di fronte. In particolare la tabella riporta per ogni paziente l'esito

del parto, l'attività svolta dal medico che la ha assistita e se il medico si è pulito le mani e come prima di entrare in sala parto.

Medico	Paziente	Esito	Attività Precedente Medico	Pulizia Mani
...	...	Deceduto	Autopsia	Salviette
...	...	Deceduto	Autopsia	Salviette
...	...	Deceduto	Parto	Disinfettante al cloro
...	...	Sopravvissuto	Esame Medico	Disinfettante al cloro
...	...	Sopravvissuto	Autopsia	Salviette
...	...	Deceduto	Autopsia	Nessuno
...	...	Sopravvissuto	Esame Medico	Disinfettante al cloro
...	...	Deceduto	Esame Medico	Salviette
...	...	Sopravvissuto	Esame Medico	Salviette
...	...	Deceduto	Parto	Nessuno

Tabella 1: Dati che descrivono l'esito sul paziente trattato (Deceduto/Sopravvissuto), l'attività svolte dal medico prima e la modalità con cui il medico si è pulito le mani prima di entrare in sala parto.



Per esempio, ognuna delle righe della Tabella 1 rappresenta una possibile configurazione, e quindi uno stato, del sistema creato per descrivere il comportamento della sala parto, dei medici che ci lavorano e degli esiti sulle pazienti. In Figura 1 per semplicità non sono stati rappresentati i valori associati ai nodi.

Una connessione tra due nodi ha un peso associato, ossia un numero che indicano la forza dell'accoppiamento tra le due variabili corrispondenti ai due nodi coinvolti. Se il peso è maggiore di zero, la connessione si dice eccitatoria e questo indica che esiste un allineamento tra i due nodi. Tanto maggiore è il valore del peso positivo, tanto più frequentemente le due variabili assumeranno valori concordi (o +1 o -1).

Al contrario, quando il peso è negativo, le variabili corrispondenti ai nodi coinvolti tendono a essere discordi. Nell'esempio rappresentato in Figura 1, è possibile osservare che esiste un peso negativo che connette i nodi *Attività precedente Autopsia* e *Esito*. Questo significa che quando il medico, prima del servizio in sala parto, ha svolto un'autopsia (quindi valore della variabile di stato Autopsia = 1), frequentemente l'Esito del parto è la morte della paziente (variabile Esito = -1).

Per adesso trascuriamo come sono individuati i pesi degli archi in una *Hopfield Network*, in seguito vedremo che una rete può apprendere i valori ottimali dei pesi degli archi a partire dai dati disponibili, come per esempio quelli riportati in Tabella 1.

Una particolarità delle *Hopfield Network* è che, dopo che ai nodi sono stati attribuiti dei valori iniziali, la rete evolve la sua configurazione, modificando i valori iniziali per migliorarli, in maniera analoga ai moderni software di videoscrittura, i quali correggono automaticamente le parole contenenti errori di battitura.

Vediamo in dettaglio i meccanismi che regolano questa evoluzione. Si ricorda che ogni nodo ha un valore associato, che può essere o +1 o -1. Il valore iniziale di ogni nodo viene confrontato col valore prodotto dalla funzione di output del nodo stesso. La funzione di output di un nodo somma l'insieme dei valori +1 e -1 associati ai nodi vicini (i nodi direttamente collegati) moltiplicati per il peso presente nell'arco che li collega. Infine, a seconda che la somma pesata sia  $\geq 0$  oppure  $< 0$ , il nodo assumerà come output finale rispettivamente +1 o -1. Il calcolo della funzione di output viene ripetuto per ogni nodo della rete. I pesi di un arco sono bidirezionali; questo significa che a differenza delle reti neurali artificiali moderne le *Hopfield Network* non hanno distinzione tra nodi di ingresso e nodi di uscita, ma ogni nodo può essere contemporaneamente output (per i nodi vicini) e ricevere input dai nodi vicini. Per esempio, dati due nodi a e b connessi da un arco, A può essere input del nodo B e contemporaneamente B può essere input del nodo A.

*Calcolo dell'output descritto con maggior formalismo matematico*

Volendo descrivere la cosa con un maggior formalismo matematico, supponiamo che un grafo sia composto da N nodi: chiameremo  $n_{i \in \{1...N\}}$  il nodo i-esimo,  $o_{i \in \{1...N\}}$  l'output del nodo i-esimo (vale a dire la funzione di output calcolata sul nodo i-esimo) e dati due nodi  $n_i$  e  $n_j$  chiameremo  $w_{i,j}$  il peso dell'arco che collega il nodo  $n_i$  con il nodo  $n_j$ . In Eq. 1 è riportata la formula che può essere usata per calcolare l'output  $o_i$  del nodo  $n_i$ , dove  $\text{signum}(x)$  è descritta in Eq. 1 e restituisce il valore +1 se  $x \geq 0$ , -1 altrimenti,  $b_j$  è un termine noto chiamato anche bias che cattura il fatto che in certe circostanze il punto di equilibrio non è lo 0 o un valo-

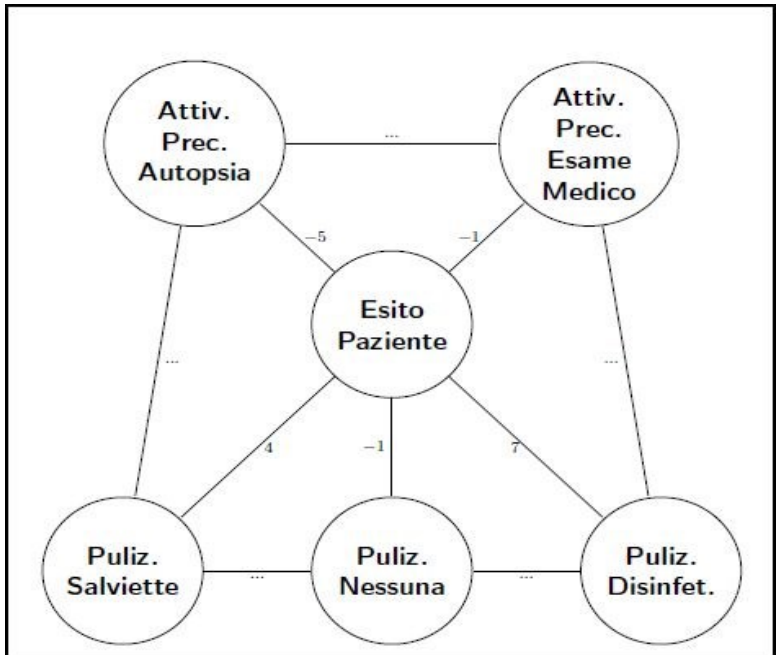


Figura 1: Hopfield Network creata per descrivere le relazioni tra le variabili del problema delle morti di parto nell'ospedale di Vienna. Sono rappresentati solamente gli archi più significativi che collegano i nodi.

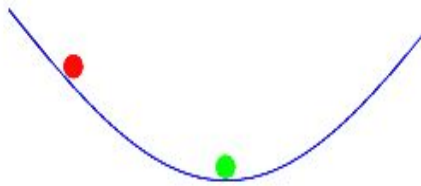
re che ci si aspetta ma un valore più elevato oppure più basso, per esempio nel voto della condotta di uno studente a scuola, la sufficienza non è 6 su 10, ma un valore più elevato.

$$o_i = \text{signum}\left(\sum_{j \in [1 \dots N], i \neq j} o_j \cdot w_{i,j}\right) + b_i \tag{1}$$

$$\text{signum}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

*Reazione a catena*

Dopo aver introdotto la funzione di output, vediamo come questa contribuisce al processo evolutivo di una rete. Da adesso in avanti saranno utilizzate in maniera indifferente le espressioni *output di un nodo* e *funzione di output di un nodo*. Quando la rete viene inizializzata, un nodo potrebbe aver un valore che non coincide con il risultato calcolato dalla sua funzione di output. In tal caso il valore della funzione di output prevale e lo stato del nodo cambia assumendo il nuovo valore. Quando un nodo altera il suo output, questo a sua volta potrebbe portare a cambiamenti nei nodi collegati. Nel complesso, si può innescare qualcosa di simile a una "reazione a catena", in cui mano a mano che avvengono cambiamenti i nodi vicini modificano il loro output e così via, fino al punto che anche i nodi che hanno dato avvio al processo possono venire a loro volta ulteriormente modificati.



*Figura 2: La biglia rossa occupa una posizione instabile e nel tempo tenderà a posizionarsi al posto della biglia verde, che corrisponde al minimo energetico.*

In uno scenario del genere, sorge spontanea la domanda: questa reazione, una volta partita, avrà un termine?

Per rispondere a questa domanda, Hopfield ha utilizzato un approccio già utilizzato per lo studio dei gas in fisica, che riassumo nel modo seguente:

1. È possibile mappare (ricondurre) tutti i possibili stati di una *Hopfield Network* a un valore di energia, ossia un valore numerico che sintetizza lo stato del sistema. In maniera analoga, il movimento caotico delle particelle di un gas può essere mappato su un valore di temperatura. L'energia ci dà alcune informazioni interessanti: per esempio in un gas, maggiore è la temperatura maggiore è lo stato di agitazione delle molecole.
2. È possibile dimostrare che ogni cambiamento di stato di un qualsiasi nodo genera un abbassamento del valore di energia associato a una *Hopfield Network* [3].
3. Data una *Hopfield Network*, è sempre possibile identificare un limite minimo al di sotto del quale la funzione di energia non può scendere. Questo limite dipende dalla configurazione della rete (il numero di nodi da cui è composta, i pesi degli archi ecc.). Per maggiori informazioni, il lettore può far riferimento a [3] o per una formulazione più moderna a [4] [5].
4. Mettendo assieme i punti 1, 2 e 3 è possibile dare una risposta alla domanda,

se una reazione all'interno di una *Hopfield Network* terminerà. La risposta è sì, infatti dato che ogni cambiamento di stato di un nodo determina una diminuzione dell'energia associata a una *Hopfield Network* e la rete ha un valore minimo di energia al di sotto del quale non può scendere, ogni "reazione a catena" innescata su una rete terminerà su uno stato ben preciso.

L'ultimo punto ha delle implicazioni molto importanti: se i valori con cui vengono inizializzati i nodi di una rete non corrispondono allo stato di minimo energetico, la rete darà avvio a una serie di cambiamenti, fino a raggiungere lo stato di minimo. Come la biglia di colore rosso in Figura 2 che se gettata in un punto qualsiasi dell'avvallamento, col tempo tenderà a fermarsi nel punto più profondo, corrispondente al minimo energetico, ovvero la posizione occupata dalla biglia verde nella stessa figura.

#### *Le Hopfield Network come memorie associative*

Quanto appena detto ha delle implicazioni molto importanti. Una *Hopfield Network* può essere utilizzata come "memoria associativa", cioè una memoria che memorizza un contenuto e è in grado di restituirlo a partire da una indicazione anche minima di tale contenuto. Per esempio, in Figura 3 si vede come a partire da una configurazione iniziale della rete rappresentata dalla Figura 3a, la rete evolve verso la configurazione a energia minima rappresentata dalla Figura 3b.

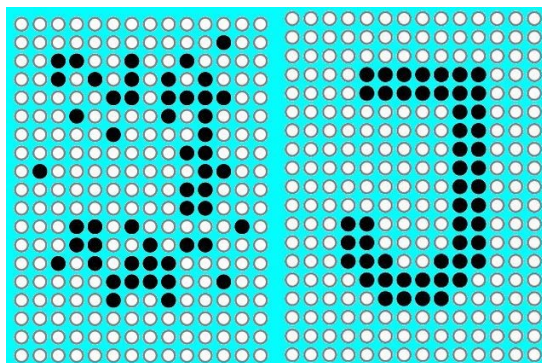


Figura 3 a e 3 b

Figura 3: Un esempio di funzionamento di una *Hopfield Network*. L'immagine a sinistra rappresenta lo stato iniziale della *Hopfield Network*, mentre quella a destra rappresenta lo stato della rete quando ha raggiunto il minimo. Ogni pixel rappresenta un nodo della *Hopfield Network*, il colore nero di un pixel indica che il nodo corrispondente della rete assume valore 1, viceversa il colore bianco è associato al valore 0.

In generale, il cuore della scoperta di Hopfield è stata che una *Hopfield Network* permette di memorizzare delle informazioni, associate a un livello minimo di energia. Cambiando i pesi degli archi è possibile modificare il minimo energetico della rete e quindi l'informazione memorizzata. Per esempio, modificando i pesi della *Hopfield Network* a cui fa riferimento la Fig. 3 è possibile far sì che la rete memorizzi (abbia cioè come configurazione associata al livello energetico minimo) l'immagine corrispondente a un'altra lettera.

#### *Modi di utilizzo di una Hopfield Network*

Una *Hopfield Network* può essere utilizzata in due modi: addestramento e inferenza.

##### 1. *Addestramento.*

I pesi degli archi, possono essere attribuiti in modo da descrivere adattarsi a un

dataset (un insieme di dati), come per esempio i dati di Tab. 1. In tal caso, si cercano di individuare i pesi ottimali che permettono alla rete di descrivere i dati presenti nel dataset. La rete visibile in Fig. 1 è un possibile esempio di addestramento. In questo caso i pesi degli archi ci danno alcune utili indicazioni sul legame esistente tra le variabili o su possibili pattern presenti nel dataset usato per l'addestramento.

Per esempio è possibile vedere che c'è un forte legame tra *Pulizia Disinfettante=1* ed *Esito=1*, ciò cattura il fatto che sanificare le mani riduce il rischio di morte in sala parto; oppure che c'è un forte legame tra *Attiv. Prec. Autopsia=1* ed *Esito=-1*, vale a dire che l'esito morte è frequente quando il medico ha svolto un'autopsia prima di recarsi in sala parto. Da queste osservazioni, può nascere il sospetto che lo svolgere un'autopsia espone il medico a qualcosa che poi risulterà fatale per la partoriente, mentre il pulire accuratamente le mani riduce il rischio. Si noti che il peso dell'arco che va da *Puliz. Dsinfet.* a *Esito Paziente* è 7 mentre il peso dell'arco che va da *Attiv. Prec. Autopsia* a *Esito Paziente* è -5, quindi in caso di occorrenza di entrambi gli eventi e trascurando il contributo degli altri nodi, l'output del nodo *Esito Paziente* è +1 [signum (7 - 5) = +1], vale a dire partoriente salva. Questi pesi matematici catturano il fatto che pulire le

*Figura 3: Un esempio di funzionamento di una Hopfield Network. L'immagine a sinistra rappresenta lo stato iniziale della Hopfield Network, mentre quella a destra rappresenta lo stato della rete quando ha raggiunto il minimo. Ogni pixel rappresenta un nodo della Hopfield Network, il colore nero di un pixel indica che il nodo corrispondente della rete assume valore 1, viceversa il colore bianco è associato al valore 0.*

mani con disinfettante controbilancia l'aver svolto una autopsia in precedenza, dove probabilmente il medico ha sporcato le mani con un qualche patogeno.

Da questo esempio è possibile vedere come l'addestramento di una *Hopfield Network* a partire da un dataset permette di estrarre utili indicazioni sui legami (pattern) esistenti tra le variabili. Occorre aggiungere, che i pattern evidenziati indicano delle correlazioni tra le variabili (in maniera intuitiva, due variabili sono correlate quando si muovono allo stesso modo), tuttavia come gli statistici sottolineano spesso, correlazione non vuol dire necessariamente causalità, vale a dire, il fatto che le variabili si muovono in maniera simile, non vuol dire necessariamente che esista un rapporto di causa effetto. Tuttavia, gli indizi, i pattern individuati, possono essere lo spunto per ulteriori approfondimenti e investigazioni che alla fine faranno luce sui reali rapporti di causa effetto. A posteriori, sappiamo che il batterio dello streptococco era una causa diffusa di mortalità materna, il 7 dottor Ignaz Semmelweis non aveva a disposizione i moderni strumenti e approcci per l'analisi dei dati, tuttavia dopo diversi studi osservazionali, per primo propose l'igiene delle mani in ambito medico.

## 2. Inferenza.

In questa fase i pesi degli archi di una *Hopfield Network* sono fissi (per esempio sono stati individuati tramite una precedente fase di addestramento), i nodi della rete vengono inizializzati con dei valori di input, nel caso in cui la configurazione non corrisponda a quella di minimo energetico, si scatena la "reazione a catena" che termina quando la rete raggiunge la configurazione di minimo energetico. Un esempio dell'inizio e della fine di tale processo è riportato in Fig. 3. Facendo riferimento alla terminologia utilizzata nel mondo del machine learning, questa modalità viene chiamata inferenza (da non confondere con il termine usato in ambito statistico).

## Boltzmann Machine

La *Boltzmann Machine* sviluppata da Hopfield è un'estensione delle *Hopfield Network*. Una *Boltzmann Machine* può essere vista come una *Hopfield Network* in cui, sono presenti dei nodi aggiuntivi che rappresentano variabili latenti. Nel campo della statistica, una variabile latente è una variabile che non può essere

rilevata direttamente ma che può avere degli effetti su variabili osservabili. [6]. Un esempio di variabile latente è rappresentato dal nodo Batterio in Fig. 4.

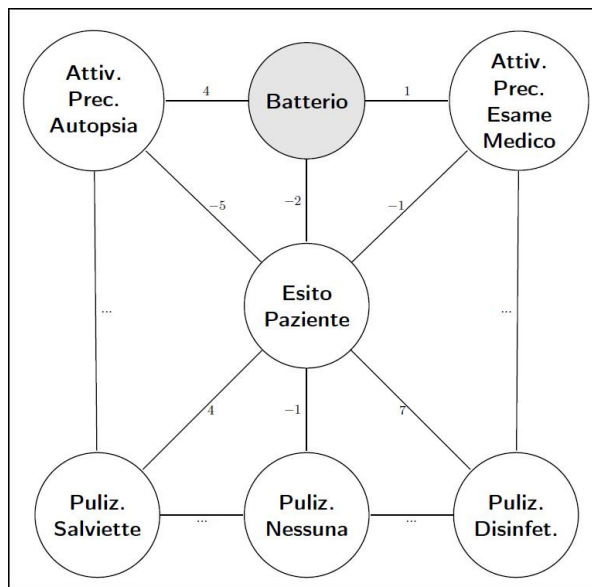


Figura 4: Boltzmann Machine derivata da Figura 1 nella quale è stata introdotta la variabile latente rappresentata dal nodo con sfondo grigio.

L'introduzione delle variabili latente comporta tutta una serie di complicazioni rispetto allo scenario di una Hopfield Network. Innanzitutto in quest'ultima esiste uno e un solo minimo (energetico), mentre in una Boltzmann Machine oltre al minimo assoluto esistono diversi minimi relativi.

Ad ogni minimo relativo corrisponde ad una specifica (e diversa) informazione che è memorizzata nella rete. Immaginiamo che alla Hopfield Network associata alla Fig. 3 venga aggiunta una variabile latente. In tal caso, la rappresentazione del diagramma energetico, come visibile in Fig. 5, avrà due minimi relativi (su cui sono state posizionate una biglia verde e una biglia rossa), di cui uno è il minimo assoluto (biglia verde). I valori dei nodi della rete associati ai due minimi, supponiamo siano rappresentati in Figura 5. La biglia rossa di Fig. 5 potrebbe corrispondere alla rappresentazione degli stati della Boltzmann Machine raffigurata in Fig. 6a mentre la biglia verde di Figura 5 potrebbe corrispondere alla rappresentazione raffigurata in Figura 6b.

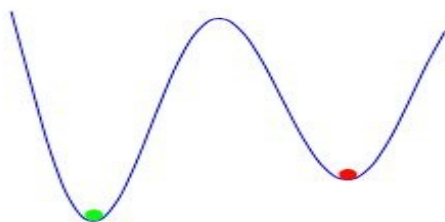


Figura 5: Si notino i due possibili minimi energetici negli avvallamenti, identificati dalla posizione delle due biglie. La biglia verde corrisponde al minimo assoluto, mentre la biglia rossa è posiziona su un minimo relativo. Per semplicità, si può far riferimento ad entrambi i minimi con l'espressione minimi relativi.

In questo caso, tenendo fissi i pesi degli archi della rete, a seconda della configurazione iniziale con cui parte una reazione a catena della rete, questa potrebbe terminare in uno qualsiasi dei minimi relativi. Se siamo fortunati, un'immagine di partenza con una J contenente rumore dovrebbe arrivare alla configurazione finale che mostra la J, mentre al contrario un'immagine di partenza con una X e del rumore, dovrebbe approdare allo stato finale corrispondente all'immagine della X. La variabile latente (che non è stata rappresentata in Fig. 5,

in quanto tale figura mostra solamente gli stati associati a variabili visibili) potrebbe assumere due valori, ognuno corrispondente ad uno degli stati di minima energia della rete (per esempio, l'immagine della X e della Y).

Nelle righe qua sopra ho usato il condizionale, perché spesso nelle *Boltzmann Machine* il legame tra variabili latenti e variabili visibili non è così semplice e intuitivo. Il comportamento appena evidenziato ha portato a una scoperta molto importante: una *Boltzmann Machine* può memorizzare diverse informazioni, ognuna corrispondente a uno dei minimi locali della funzione di energia. La *Boltzmann Machine* continua a comportarsi come una memoria associativa, cioè fornendo un input (anche incompleto) dell'informazione che si vuol recuperare: la *Boltzmann Machine* dovrebbe recuperare l'informazione.

Purtroppo, la presenza dei minimi relativi tuttavia crea diversi problemi, infatti potrebbe capitare, che una volta inseriti dei valori in ingresso, la reazione a catena si fermi su un minimo locale non significativo. Per risolvere problemi di questo tipo, le *Boltzmann Machine* applicano una variazione all'algoritmo utilizzato per individuare l'output di un nodo a partire dagli input. All'equazione 1 viene aggiunta una componente casuale che potrebbe alterare l'output del nodo da -1 a +1 o viceversa. Intuitivamente, la ricerca del minimo può essere vista come un alpinista che deve scendere a valle da una cima non conoscendo né il luogo in cui si trova né avendo a disposizione una cartina, questo si affida ad un criterio molto semplice, cercherà di seguire il terreno dove c'è una maggior pendenza. Questo criterio tuttavia, se strettamente seguito, porterà l'alpinista a infilarsi nel primo avvallamento (minimo locale) che incontra. Per questo, ogni tanto e in maniera casuale, l'alpinista fa delle scelte contrarie al criterio appena descritto, ad esempio ogni tanto potrebbe voltarsi e camminare in salita. Questa casualità, potrebbe farlo uscire da un minimo locale e riprendere la strada verso un altro punto di minimo. Questa componente di casualità, come appena introdotto, può aiutare ad uscire dai minimi locali, tuttavia non offre la garanzia di arrivare al minimo assoluto.

#### *Restricted Boltzmann Machine*

Un grosso problema delle *Boltzmann Machine* riguarda il carico computazionale richiesto per svolgere le operazioni di addestramento e inferenza. Si pensi che al crescere della rete ogni nuovo nodo deve essere collegato con un arco a tutti i nodi esistenti, incrementando quindi la quantità di operazioni da svolgere. Pertanto, l'uso degli algoritmi di apprendimento diventa di fatto impossibile a meno che la rete non abbia dimensioni minime.

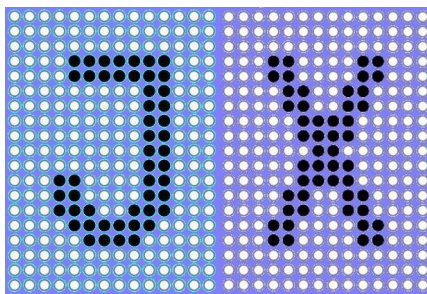


Figura 6: Rappresentazione degli stati visibili di due condizioni di equilibrio di una Hopfield Network: a sinistra stato dei nodi associati a un valore di equilibrio; a destra stato dei nodi associati all'altro valore di equilibrio.

Per far fronte a questi problemi, Hinton ha introdotto le *Restricted Boltzmann Machine*, le cui caratteristiche saranno ora brevemente introdotte. I nodi corrispondenti a variabili osservabili e i nodi corrispondenti a variabili non osservabili (variabili latenti) sono divisi in due gruppi, le connessioni tra nodi non possono avvenire all'interno di un gruppo ma solo tra nodi di gruppi diversi, come rappresentato in Figura. 7.

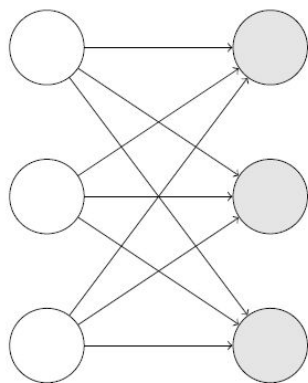


Figura 7: Una rappresentazione di una *Restricted Boltzmann Machine*, dove i nodi in bianco sono i nodi corrispondenti a variabili visibili, mentre i nodi in grigio corrispondono a variabili latenti. Si noti che gli archi sono orientati, pertanto le informazioni possono fluire solo lungo la direzione indicata dalle frecce.

Inoltre, i collegamenti tra i nodi sono direzionali, si notino i versi delle frecce nella Fig. 7. Tutto ciò contribuisce a ridurre il carico computazionale necessario sia per l'addestramento della rete a partire da un insieme di dati, sia per l'inferenza. Le *Restricted Boltzmann Machine* possono essere connesse una all'altra (l'output di una rete diventa l'input della rete successiva) per ottenere reti via via più potenti in grado di risolvere compiti complessi.

### Dalle Hopfield Network e dalle Boltzmann Machine ai giorni nostri

Le reti neurali artificiali (*Artificial Neural Network, ANN*), che sono alla base delle affascinanti applicazioni di cui si sente tanto parlare in questo periodo, sono basate sulle scoperte avvenute con le *Hopfield Network* e le *Boltzmann Machine*. Per esempio, in Fig. 8 è rappresentata una ANN dove i nodi I1, I2, . . . I4 sono nodi di input che corrispondono a variabili osservabili, i nodi H1 ed H2 sono delle variabili latenti (il loro insieme è chiamato *hidden layer*, cioè strato nascosto) perché non corrispondono a variabili osservabili ma sono ricavate da queste ultime, l'output finale della rete è fornito dal nodo O1, che basa le sue decisioni solamente sulle variabili latenti dell'*hidden layer*.

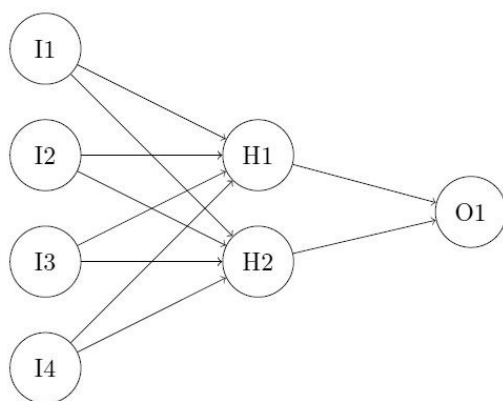


Figura 8: Un esempio di rete neurale artificiale

Una rete come quella appena introdotta può essere utilizzata per prendere decisioni; ad esempio, i dati di input potrebbero essere le rilevazioni dei sensori di un impianto chimico e la rete deve decidere di volta in volta se produrre un allarme. Naturalmente la rete in Fig. 8 è una rete molto semplice, le reti utilizzate per compiti complessi come la classificazione di immagini o la trascrizione del parlato, utilizzano molti più nodi, molti più strati interni, diverse configurazioni di



### Il Percettrone

I lavori di Hopfield e Hinton sono ispirati dal percettrone [7], una ricostruzione matematica del modello di funzionamento di un singolo neurone, che sarà ora brevemente descritto. Il percettrone riceve dei valori numerici in ingresso e produce un output ottenuto applicando la formula descritta in Eq. 2, vale a dire una somma pesata dei valori in ingresso e di un termine noto. Questo risultato intermedio viene dato in pasto ad una funzione di attivazione (per esempio, a seconda che il risultato superi o meno una certa soglia, verrà restituito il valore 0 oppure 1).

$$y = g\left(\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i + b\right) \quad (2)$$

Dove  $x_i$  è l'input  $i$ -esimo e  $w_i$  è il peso corrispondente,  $b$  è un termine costante (chiamato anche bias o termine noto) e  $g()$  è la funzione di attivazione.

Un percettrone, come dimostrato in [7], può essere utilizzato per implementare il connettivo logico AND (in logica booleana); l'AND può essere descritto dalla tavola di verità riportata in Tabella 2, dove le colonne A e B rappresentano i possibili valori in ingresso e la colonna A AND B rappresenta il risultato dell'operazione.

Si ricorda che le variabili booleane possono assumere solamente i valori *Vero* o *Falso*, spesso rappresentati con i valori numerici 0 oppure 1.

A	B	A AND B
0 (Falso)	0 (Falso)	0 (Falso)
0 (Falso)	1 (Vero)	0 (Falso)
1 (Vero)	0 (Falso)	0 (Falso)
1 (Vero)	1 (Vero)	1 (Vero)

Tabella 2: La tabella di verità che descrive il connettore logico AND: 0 va interpretato come Falso, 1 come Vero; l'unico caso in cui A AND B da come risultato Vero è quando entrambi gli input sono Veri.

Il percettrone di Figura 9 può essere utilizzato per implementare il connettivo logico AND se configurato nel modo seguente. La somma pesata è implementata come mostrato in Equazione 3, dove  $x_1$  fa riferimento ai valori della colonna A, mentre  $x_2$  fa riferimento ai valori della colonna B della Tabella 2, il termine noto è nullo.

$$f(x_1, x_2) = 0.6 \cdot x_1 + 0.6 \cdot x_2 \quad (3)$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

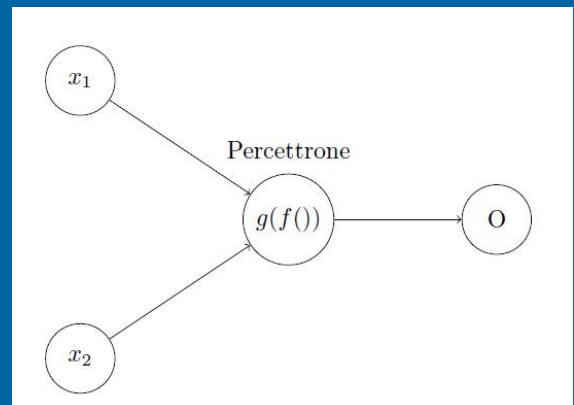


Figura 9: Rappresentazione di un percettrone.  $x_1$  ed  $x_2$  rappresentano le variabili di ingresso,  $O$  rappresenta la variabile di uscita, Perc. rappresenta il nodo che implementa la funzione del percettrone descritta in Eq.2,

connessione tra uno strato e l'altro etc. Tuttavia, anche in questo esempio semplice, il lettore noterà una forte somiglianza con molti degli aspetti introdotti dalle *Hopfield Network* e dalle *Boltzmann Machine*.

In conclusione possiamo dire che le *Hopfield Network* e le *Boltzmann Machine* hanno dimostrato che le architetture basate su neuroni connessi possono immagazzinare informazioni, possono restituire a fronte di una richiesta incompleta o una descrizione di bassa qualità, inoltre diverse reti possono essere tra loro interconnesse per svolgere compiti sempre più complessi.

Alcuni limiti intrinseci legati ai costi computazionali limitano le applicazioni pratiche delle *Hopfield Network* e delle *Boltzmann Machine*, tuttavia entrambe sono molto interessanti per il contributo che hanno fornito alla teoria delle reti neurali artificiali moderne e in generale al mondo dell'Intelligenza Artificiale.

Inoltre, è interessante notare come le *Hopfield Network* e le *Boltzmann Machine* sfruttano approcci presi a prestito dalla fisica (per esempio la funzione energia) e dalla statistica (le variabili latenti e l'introduzione di una componente casuale per affrontare il problema dei minimi locali).

*Mirko Cesarini*

*(Ingegnere informatico. Ricercatore a tempo indeterminato presso il Dipartimento di Statistica e Metodi Quantitativi dell'Università di Milano Bicocca).*

#### Riferimenti bibliografici

- [1] Royal Swedish Academy of Sciences, "Nobel prize in physics 2024 press release," Ottobre 2024. <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2024/press-release/>.
- [2] M. Best and D. Neuhauser, "Ignaz semmelweis and the birth of infection control," *BMJ Quality & Safety*, vol. 13, no. 3, pp. 233–234, 2004.
- [3] J. J. Hopfield, "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities.," *Proceedings of the national academy of sciences*, vol. 79, no. 8, pp. 2554–2558, 1982.
- [4] D. J. Amit and D. J. Amit, *Modeling brain function: The world of attractor neural networks*. Cambridge university press, 1989.
- [5] B. Mehlig, *Machine learning with neural networks: an introduction for scientists and engineers*. Cambridge University Press, 2021.
- [6] D. J. Bartholomew, M. Knott, and I. Moustaki, *Latent variable models and factor analysis: A unified approach*. John Wiley & Sons, 2011.
- [7] W. S. McCulloch and W. Pitts, "A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity," *The bulletin of mathematical biophysics*, vol. 5, pp. 115–133, 1943. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02478259>.

